

В.А.Комаров, А.В.Соловов

### УСКОРЕНИЕ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА ОТЫСКАНИЯ РАВНОПРОЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Равнопрочные конструкции могут быть найдены по алгоритму, изложенному в [1, 2]. При этом отыскание равнопрочного распределения материала в конструкции ведется по следующему плану:

- конструкция разбивается на достаточно малые элементы;
- назначается произвольное распределение материала по элементам;
- определяется напряженное и деформированное состояние конструкции;
- по найденным усилиям назначается новое распределение материала.

Этапы 3 и 4 повторяются до тех пор, пока решение не стабилизируется.

Описанный алгоритм отыскания равнопрочных конструкций (АРК) обладает высоким быстродействием. Для инженерных целей обычно достаточно 5 - 7 итераций, причем сходимость почти не зависит от сложности и степени статической неопределимости конструкции.

На третьем этапе АРК эффективен метод конечных элементов [3, 4]. Однако даже при наличии хорошей программы, реализующей этот метод, определение напряженного и деформированного состояния конструкции - достаточно длительный процесс. Так, расчет крыла самолета с достаточной для инженерных целей точностью на один расчетный случай требует около 1 часа машинного времени ЭВМ БЭСМ-4. Проектирование же реальных конструкций ве-

дется на несколько случаев нагружения ( в авиации 5 - 10). Поэтому задача ускорения АРК является весьма актуальной.

Ускорение процесса отыскания равнопрочных конструкций может быть достигнуто двумя путями: уменьшением числа итераций и сокращением длительности каждой итерации. Способ, использующий первый путь, предлагается в работе [ 5]. В настоящей статье рассматриваются два способа, сокращающие длительность каждой итерации АРК.

Первый способ ускорения АРК основан на том, что в статически неопределимых конструкциях изменения в распределении материала ведут к изменению в распределении усилий. Причем опыт показывает, что если в АРК в качестве начального принято произвольное распределение материала, то на первых двух-трех итерациях происходит существенное перераспределение усилий-до сотен процентов. Поэтому совершенно нецелесообразно определять на первых итерациях усилия с высокой точностью. Достаточно получить одну-две точных значащих цифры и в соответствии с их значениями перераспределить материал в конструкции. На следующих итерациях АРК перераспределение материала идет менее интенсивно. Изменения в жесткостях конструкции получаются за счет изменений последующих значащих цифр в условиях, которые следует определять уже более точно.

При расчете конструкций по методу конечных элементов наиболее длительным этапом является решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Точность решения системы обычно определяется по какой-либо норме вектора невязок  $R = \{X_i\}$ , например по второй норме  $\|R\|_2 = \sum |X_i|$  [ 6 ]. В практических задачах обычно стремятся к уменьшению  $\|R\|_2$  в  $10^4 - 10^6$  раз по сравнению с начальным значением. При установившемся процессе решения системы  $\|R\|_2$  монотонно убывает с возрастанием числа итераций. Как правило, уменьшение  $\|R\|_2$  на один-два порядка достигается очень быстро, а дальнейшее увеличение точности требует резко возрастающего объема вычислений. В качестве примера на рис. 2 приведен график, построенный по результатам расчета в перемещениях конструкции, показанной на рис. 1. Здесь  $n$  - число итераций СЛАУ.

Такое поведение нормы вектора невязок можно объяснить тем, что искомые неизвестные - силы или перемещения в узлах - асимптотически приближаются к своим точным значениям. Причем расчеты

показывают, что в конце отрезка быстрой сходимости решения СЛАУ, усилия в активно работающих элементах вычисляются с точностью до одной-двух значащих цифр. Поэтому решение СЛАУ с малой точностью на первых шагах АРК должно приводить к существенному сокращению объема вычислений без заметного уменьшения точности определения равнопрочной конструкции.

Второй способ ускорения АРК более очевиден и основан на следующем. Для решения СЛАУ итерационными методами в качестве начального приближения берется произвольный вектор неизвестных. Опыт расчета различных конструкций показывает, что если в качестве начального приближения использовать вектор неизвестных уже решенного похожего случая нагружения, то система решается значительно быстрее. Такой способ ускорения естественно применять и в АРК, где в качестве хороших начальных приближений при решении СЛАУ можно использовать вектора неизвестных соответствующих случаев нагружения, полученных на предыдущих итерациях АРК. Заметим, что этот прием не является новым. Например, в [7] отмечается его преимущество перед прямыми методами изменения жесткостей в случае, если одновременно материал перераспределяется на большей части конструкции.

Эффективность описанных способов ускорения АРК исследовалась на примере отыскания равнопрочной конструкции трехслойной пластинки, схема идеализации которой показана на рис. 1. Равнопрочное распределение материала в пластинке отыскивалось четыре раза:

без ускорения АРК;

при решении системы с переменной точностью по итерациям АРК;

-с использованием в качестве начальных приближений векторов неизвестных предыдущих итераций АРК;

с совместным применением обоих приемов ускорения.

В этом конкретном примере равнопрочные конструкции отыскивались с высокой точностью - до изменения всех проектных параметров менее чем на 1%. Без ускорения АРК было сделано 10 итераций. При использовании первого способа ускорения на первом шаге оптимизации решение СЛАУ останавливалось после уменьшения  $\|R\|_{\infty}$  на порядок. На следующих девяти итерациях точность решения СЛАУ равномерно возрастала до уменьшения  $\|R\|_{\infty}$  на пять порядков.

Результаты исследования эффективности ускорения АРК свиде-

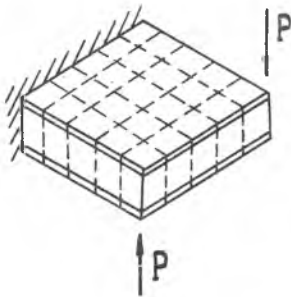


Рис. 1

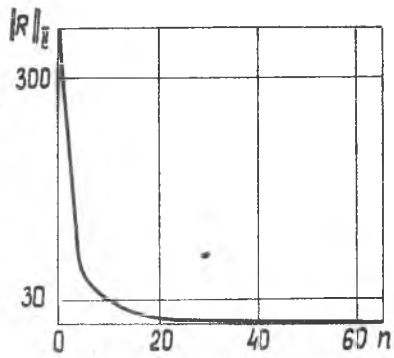


Рис. 2

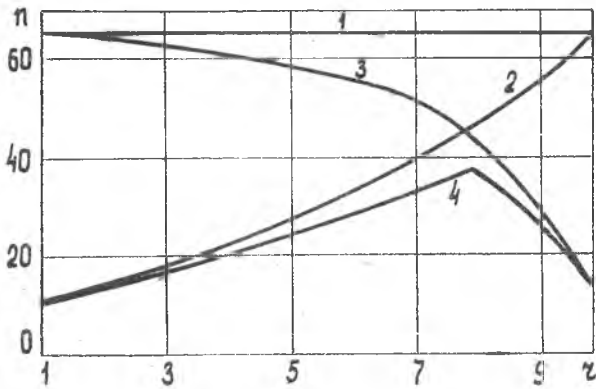


Рис. 3

ны в графики на рис. 3. Здесь  $n$  - порядковый номер итерации АРК. Из графиков видно, что в сокращение длительности решения системы на первых итерациях больший вклад дает переменная точность (кривая 2), а на последних - использование в качестве начальных приближений векторов неизвестных предыдущих итераций (кривая 3). Совместное использование обоих приемов ускорения (кривая 4) позволило уменьшить суммарную длительность решения СЛАУ на 10 итерациях АРК примерно в 2,5 раза. Причем равнопрочные конструкции, полученные с ускорением и без него, практически не отличаются друг от друга.

Оба способа ускорения АРК были применены при оптимизации распределения материала на 5 случаев нагружения в конструкции одного летательного аппарата со степенью кинематической неопределенности  $\sim 500$ . Без ускорения общая длительность решения СЛАУ в этой задаче составляла 75% от длительности всей оптимизации. Ускорение АРК позволило уменьшить затраты машинного времени на весь процесс оптимизации примерно в 2 раза.

#### Л и т е р а т у р а

1. Комаров А.А. Основы проектирования силовых конструкций. Куйбышевское книжное издательство, 1965.
2. Комаров В.А. О рациональных силовых конструкциях крыльев малого удлинения. "Проектирование оптимальных конструкций". Труды КуАИ, вып. 32, 1968.
3. Аргирис Дж. Современные достижения в методах расчета конструкций с применением матриц (перевод с англ.), Стройиздат, 1968.
4. Розин Л.А. Расчет гидротехнических сооружений на ЭЦВМ. Метод конечных элементов. "Энергия", 1971.
5. Иванова Е.А., Комаров В.А. Рациональная конструкция неподвижной части крыла с изменяемой стреловидностью. "Проектирование оптимальных конструкций". Труды КуАИ, вып. 54, 1971.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. "Наука", 1966.
7. Argiris J.M., Brönlund O.E., Roy J.R., Scharpf D.W. *AJAA Journal*, N9, 1971.