КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им.С.П.КОРОЛЕВА
Труды, выпуск 63, 1972 г.

В.Г.Фокин

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСТАТОЧНЫХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИНАХ

Многослойные листовые детали находят широкое применение в машиностроении и других отраслях техники. В связи с использованием высокопрочных металлов проблема остаточных напряжений для таких деталей приобрела особую актуальность. Методы определения напряжений в многослойной пластине рассмотрены в статье [I] , где предполагалось, что при исследовании полоски ее прогибы и деформации не зависят от касательных напряжений. В настоящей статье содержится строгое обоснование указанного предположения, а также предполагается способ расчета касательных напряжений по результатам измерения угла закручивания полоски любой ширины.

Задача Мичелла

Рассмотрим многослойный брус прямоугольного сечения с изотропными слоями, имеющими разные модули упругости при кручении G_i и толщины h_i (рис.I). Брус нагружен на боковых гранях одинаковыми по величине, но противоположными по направлению распределенными касательными усилиями $T(z)$, изменяющимися только вдоль оси z . Пусть эта нагрузка уравновешивается такими же касательными усилиями $T(z)$ на торцах. Такой вид имеет нагружение полоски, эквивалентное вырезке из пластины и удалению верхних или нижних слоев.

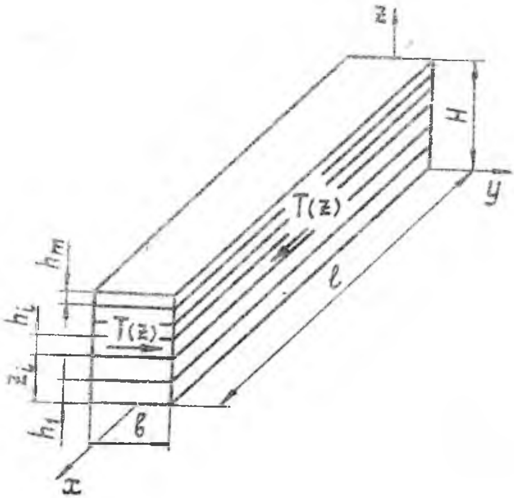

Рис. I

Решение для каждого слоя i ищем в виде

$$u_i = \theta\varphi_i'(y,z) + \varphi_i''(y,z), \quad v = -\theta x z, \quad w = \theta x y \qquad (1)$$

Здесь u_i, v, w – перемещения точек слоя i вдоль осей x, y, z; θ – угол закручивания полоски на единицу длины.

Для принятой формы решения получим

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$$

$$\tau_{ixy} = \tau'_{ixy} + \tau''_{ixy} = G_i\,\theta\left(\frac{\partial\varphi_i'}{\partial y} - z\right) + G_i\,\frac{\partial\varphi_i''}{\partial y}$$

$$\tau_{ixz} = \tau'_{ixz} + \tau''_{ixz} = G_i\,\theta\left(\frac{\partial\varphi_i'}{\partial z} + y\right) + G_i\,\frac{\partial\varphi_i''}{\partial z}, \qquad (2)$$

$$G_i\,\theta\,\Delta\varphi_i' + G_i\,\Delta\varphi_i'' = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (3)$$

На боковой поверхности бруса должно быть

$$\tau_{ixy}\Big|_{y=\pm\frac{b}{2}}=T(z),\qquad \tau_{1xz}\Big|_{z=0}=\tau_{mxz}\Big|_{z=H}=0, \tag{4}$$

а на плоскостях раздела слоев

$$u_i\Big|_{z=z_i}=u_{i-1}\Big|_{z=z_i},\quad \tau_{ixz}\Big|_{z=z_i}=\tau_{i-1xz}\Big|_{z=z_i}=\tau_i(y). \tag{5}$$

Условия на торцах удовлетворим по Сен-Венану:

$$b\int\limits_0^H T(z)\,dz=\sum_{i=1}^m\iint\limits_{S_i}\tau_{ixy}\,ds, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^m\iint\limits_{S_i}\tau_{ixz}\,ds=0, \tag{7}$$

$$-b\int\limits_0^H zT(z)\,dz=\sum_{i=1}^m\iint\limits_{S_i}(\tau_{ixz}\,y-\tau_{ixy}\,z)\,ds. \tag{8}$$

Соотношения (I) - (5) сводятся к двум задачам Неймана для каждого слоя:

$$\Delta\varphi_i'=0$$

$$\frac{\partial\varphi_i'}{\partial y}\Big|_{y=\pm\frac{b}{2}}=z,\quad \frac{\partial\varphi_i'}{\partial z}\Big|_{z=z_i}=\frac{\tau_i'}{G_i\theta}-y,\quad \frac{\partial\varphi_i'}{\partial z}\Big|_{z=z_{i+1}}=\frac{\tau_{i+1}'}{G_i\theta}-y, \tag{9}$$

$$\Delta\varphi_i''=0$$

$$\frac{\partial\varphi_i''}{\partial y}\Big|_{y=\pm\frac{b}{2}}=\frac{T(z)}{G_i},\quad \frac{\partial\varphi_i''}{\partial z}\Big|_{z=z_i}=\frac{\tau_i''}{G_i},\quad \frac{\partial\varphi_i''}{\partial z}\Big|_{z=z_{i+1}}=\frac{\tau_{i+1}''}{G_i}. \tag{IO}$$

Здесь

$$\tau_i'=\tau_{ixz}'\Big|_{z=z_i}=\tau_{i-1xz}'\Big|_{z=z_i},\quad \tau_i''=\tau_{ixz}''\Big|_{z=z_i}=\tau_{i-1xz}''\Big|_{z=z_i},\quad \tau_i'+\tau_i''=\tau_i.$$

В силу симметрии внешней нагрузки и геометрии бруса функции $\tau_i'=\tau_i'(y)$, $\tau_i''=\tau_i''(y)$ должны быть нечетными. Их значения определяются из условий непрерывности перемещений (5), которые можно представить как

$$\varphi_i'\Big|_{z=z_i}=\varphi_{i-1}'\Big|_{z=z_i},\quad \varphi_i''\Big|_{z=z_i}=\varphi_{i-1}''\Big|_{z=z_i} \tag{II}$$

Методом Фурье найдем

$$\varphi_i' = \sum_{r=1,3,5,\ldots}^{\infty}\left\{\frac{1}{\gamma_r G_i\theta\,\mathrm{sh}\,\gamma_r h_i}\left[\tau'_{i+1r}\,\mathrm{ch}\,\gamma_r(z-z_i)-\tau'_{ir}\,\mathrm{ch}\,\gamma_r(z-z_{i+1})\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\delta}{b\gamma_r^3\,\mathrm{sh}\,\gamma_r h_i}\left[\mathrm{ch}\,\gamma_r(z-z_i)-\mathrm{ch}\,\gamma_r(z-z_{i+1})\right]\right\}\cos\gamma_r\left(y+\frac{b}{2}\right)+zy+B_i', \qquad (12)$$

$$\varphi_i'' = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_{ik}}{G_i\beta_{ik}\,\mathrm{ch}\,\beta_{ik}\frac{b}{2}}\,\mathrm{sh}\,\beta_{ik}y\cdot\cos\beta_{ik}(z-z_i)+\frac{\alpha_{i0}}{2G_i}\,y+$$

$$+\sum_{r=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{1}{\gamma_r G_i\,\mathrm{sh}\,\gamma_r h_i}\left[\tau''_{i+1r}\,\mathrm{ch}\,\gamma_r(z-z_i)-\tau''_{ir}\,\mathrm{ch}\,\gamma_r(z-z_{i+1})\right]\cos\gamma_r\left(y+\frac{b}{2}\right)+B_i''. \qquad (13)$$

Здесь

$$\alpha_{i0}=\frac{2}{h_i}\int_{z_i}^{z_{i+1}}T(z)\,dz,\quad \alpha_{ik}=\frac{2}{h_i}\int_{z_i}^{z_{i+1}}T(z)\cos\beta_{ik}(z-z_i)\,dz, \qquad (14)$$

$$\tau'_{ir}=\frac{2}{b}\int_{-b/2}^{b/2}\tau_i'(y)\cos\gamma_r\left(y+\frac{b}{2}\right)dy,\quad \tau''_{ir}=\frac{2}{b}\int_{-b/2}^{b/2}\tau_i''(y)\cos\gamma_r\left(y+\frac{b}{2}\right)dy, \qquad (15)$$

$$\gamma_r=\frac{r\pi}{b},\quad \beta_{ik}=\frac{k\pi}{h_i},\quad k=1,2,3\ldots,\quad r=1,3,5\ldots$$

Исследуем ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_{ik}}{G_i\beta_{ik}\,\mathrm{ch}\,\beta_{ik}\frac{b}{2}}\,\mathrm{sh}\,\beta_{ik}y\cos\beta_{ik}(z-z_i). \qquad (16)$$

Будем предполагать, что функция $T(z)$ на отрезке $[z_i, z_{i+1}]$ имеет конечные производные. Тогда она удовлетворяет условию Липшица $|T(z+\delta)-T(z)|\le L|\delta|$, и при разложении ее по $\cos\beta_{ik}(z-z_i)$, согласно теореме Бернштейна [2], ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_{ik}|$ сходится. Отсюда вытекает равномерная сходимость ряда (16), а также ряда, полученного почленным дифференцированием (16) по y, так как

$$\left|\frac{\mathrm{sh}\,\beta_{ik}y}{\mathrm{ch}\,\beta_{ik}\frac{b}{2}}\right|\le 1,\qquad \left|\frac{\mathrm{ch}\,\beta_{ik}y}{\mathrm{ch}\,\beta_{ik}\frac{b}{2}}\right|\le 1.$$

Следовательно, функция, представленная рядом (16), дифференцируема по y и ее можно разложить в ряд Фурье по $\cos\gamma_r\left(y+\frac{b}{2}\right)$, причем при вычислении коэффициентов Фурье допустимо почленное интегрирование (16).

Разложив функцию (16) в ряд по $\cos\gamma_r\left(y+\frac{b}{2}\right)$ и использовав условия (II), получим бесконечную систему уравнений для определения коэффициентов τ''_{ir}. После суммирования по индексам k эта система принимает вид

$$\frac{\tau''_{i-1r}}{G_{i-1}\,\mathrm{sh}\gamma_r h_{i-1}}+\frac{\tau''_{i+1r}}{G_i\,\mathrm{sh}\gamma_r h_i}-\frac{\tau''_{ir}}{G_{i-1}\,\mathrm{th}\gamma_r h_{i-1}}-\frac{\tau''_{ir}}{G_i\,\mathrm{th}\gamma_r h_i}=$$

$$=\int\limits_{z_i}^{z_{i+1}}\frac{4T(z)}{bG_i}\,\frac{\mathrm{ch}\gamma_r(z-z_{i+1})}{\mathrm{sh}\gamma_r(z_{i+1}-z_i)}dz-\int\limits_{z_{i-1}}^{z_i}\frac{4T(z)}{bG_{i-1}}\,\frac{\mathrm{ch}\gamma_r(z-z_{i-1})}{\mathrm{sh}\gamma_r(z_i-z_{i-1})}dz \qquad (17)$$

$$i=2,3,4\ldots,m,\quad r=1,3,5\ldots,\quad \tau''_{1r}=0,\quad \tau''_{m+1r}=0.$$

Аналогично составляется система уравнений для вычисления коэффициентов τ'_{ir}:

$$\frac{\tau'_{i-1r}}{G_{i-1}\,\mathrm{sh}\gamma_r h_{i-1}}+\frac{\tau'_{i+1r}}{G_i\,\mathrm{sh}\gamma_r h_i}-\frac{\tau'_{ir}}{G_{i-1}\,\mathrm{th}\gamma_r h_{i-1}}-\frac{\tau'_{ir}}{G_i\,\mathrm{th}\gamma_r h_i}=$$

$$=\frac{8\theta}{\gamma_r^2 b}\left[\mathrm{th}\gamma_r\frac{(z_i-z_{i-1})}{2}+\mathrm{th}\gamma_r\frac{(z_{i+1}-z_i)}{2}\right] \qquad (18)$$

$$i=2,3,4,\ldots,m,\quad r=1,3,5\ldots,\quad \tau'_{1r}=0,\quad \tau'_{m+1r}=0.$$

Решения (12),(13) удовлетворяют условиям на торцах (6) и (7). Из условия (8) найдем относительный угол закручивания полоски

$$\theta=\frac{V}{D}, \qquad (19)$$

где

$$V=\sum_{i=1}^{m}\left\{\int\limits_{z_i}^{z_{i+1}}bT(z)\left[z_{i+1}+z_i-2z-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{k=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{16\,\mathrm{th}\beta_{ik}\frac{b}{2}}{b(z_{i+1}-z_i)(\beta_{ik})^3}\cos\beta_{ik}(z-z_i)\right]dz+\sum_{r=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{4(\tau''_{i+1r}+\tau''_{ir})}{(\gamma_r)^3}\mathrm{th}\gamma_r\frac{(z_{i+1}-z_i)}{2}\right\}$$

$$D=\sum_{i=1}^{m}\left\{\frac{G_i b^3(z_{i+1}-z_i)}{3}-\sum_{r=1,3,5\ldots}^{\infty}\left[\frac{64G_i}{b(\gamma_r)^5}\mathrm{th}\gamma_r\frac{(z_{i+1}-z_i)}{2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{4(\tau'_{i+1r}+\tau'_{ir})}{\theta(\gamma_r)^3}\mathrm{th}\gamma_r\frac{(z_{i+1}-z_i)}{2}\right]\right\}$$

Из (I9) вытекает формула для угла закручивания в случае однородного бруса, полученная в работе [3] . Для двуслойного бруса из (I9),(I7),(I8) найдем

$$V=\int_0^{h_1} bT(z)\Big[h_1-2z-\sum_{k=1,3,5...}^{\infty}\frac{16\,\mathrm{th}\,\beta_{1k}\frac{b}{2}}{bh_1(\beta_{1k})^3}\cos\beta_{1k}z+$$

$$+\sum_{\tau=1,3,5...}^{\infty}\frac{16G_2\,\mathrm{th}\gamma_\tau h_2[\mathrm{th}\gamma_\tau\frac{h_2}{2}+\mathrm{th}\gamma_\tau\frac{h_1}{2}]}{b^2(\gamma_\tau)^3[G_2\,\mathrm{th}\gamma_\tau h_2+G_1\,\mathrm{th}\gamma_\tau h_1]}\,\frac{\mathrm{ch}\gamma_\tau z}{\mathrm{ch}\gamma_\tau h_1}\Big]dz+\int_{h_1}^{h_1+h_2} bT(z)\Big[h_2+2h_1-$$

$$-2z-\sum_{k=1,3,5...}^{\infty}\frac{16\,\mathrm{th}\,\beta_{2k}\frac{b}{2}}{bh_2(\beta_{2k})^2}\cos\beta_{2k}(z-h_1)-$$

$$-\sum_{\tau=1,3,5...}^{\infty}\frac{16G_1\,\mathrm{th}\gamma_\tau h_1(\mathrm{th}\gamma_\tau\frac{h_2}{2}+\mathrm{th}\gamma_\tau\frac{h_1}{2})}{b^2(\gamma_\tau)^3[G_2\,\mathrm{th}\gamma_\tau h_2+G_1\,\mathrm{th}\gamma_\tau h_1]}\,\frac{\mathrm{ch}\gamma_\tau(z-h_1-h_2)}{\mathrm{ch}\gamma_\tau h_2}\Big]dz\,,$$

$$D=\frac{G_2b^3h_2}{3}+\frac{G_1b^3h_1}{3}-\sum_{\tau=1,3,5...}^{\infty}\frac{64}{b(\gamma_\tau)^5}\Big[G_2\,\mathrm{th}\gamma_\tau\frac{h_2}{2}+$$

$$+G_1\,\mathrm{th}\gamma_\tau\frac{h_1}{2}\Big]+\sum_{\tau=1,3,5...}^{\infty}\frac{64G_1G_2\,\mathrm{th}\gamma_\tau\frac{h_1}{2}\,\mathrm{th}\gamma_\tau\frac{h_2}{2}[\mathrm{ch}\gamma_\tau(h_1+h_2)-1]}{b(\gamma_\tau)^5[G_1\,\mathrm{sh}\gamma_\tau h_1\,\mathrm{ch}\gamma_\tau h_2+G_2\,\mathrm{sh}\gamma_\tau h_2\,\mathrm{ch}\gamma_\tau h_1]}.$$

Определение остаточных касательных напряжений

Предположим, что многослойная пластина (рис.2) имеет остаточные напряжения, изменяющиеся только по толщине. Такое распределение внутренних сил характерно для листов, полученных прокаткой и рядом других способов. Из уравнений равновесия и граничных условий вытекает $\sigma_z=\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$ [3] . Остальные компоненты напряжений самоуравновешены.

Вырежем из пластины полоску без верхнего слоя толщиной a . Заметим, что фактически сначала вырезают целую полоску, а затем удаляют слой a . Применение указанного искусственного приема не повлияет на окончательный результат, но упростит задачу. Вырезка полоски эквивалентна нагружению ее граней силами $-\sigma_x, -\sigma_y, -\tau_{xy}$, равными по величине и противоположными по знаку соответствующим

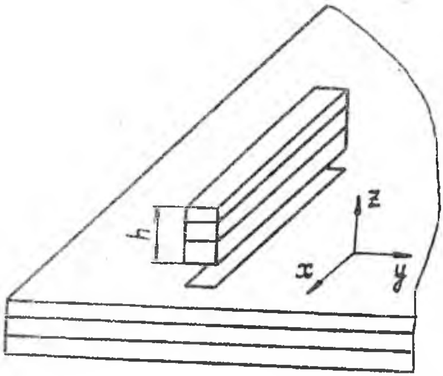

Рис. 2

остаточным напряжениям. Рассмотрим только касательные силы $T(z) = -\tau_{xy}$. Согласно найденному решению задачи Мичелла, они вызывают закручивание полоски, тогда как нормальные силы на эту деформацию не влияют. Если экспериментальным путем найти функцию $\theta = \theta(a)$, то выражение (I9) можно рассматривать как интегральное уравнение для $T(z) = -\tau_{xy}$. На одном образце невозможно получить функцию $\theta(a)$ в пределах всего отрезка $0 \leq a \leq h$. Поэтому нужно испытать еще одну полоску с тем же исходным напряженным состоянием, но снимать слои материала с другой (нижней) грани, измеряя соответствующие углы закручивания. Они используются в интегральном уравнении, подобном (I9). Полученная система интегральных уравнений позволяет найти τ_{xy} по всей толщине пластины. Для решения системы следует применять численный метод и воспользоваться условием самоуравновешенности напряжений.

Литература

I. В.Г.Фокин, С.И.Иванов. Труды КуАИ, вып.53, I97I.

2. Г.М.Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том Ш, Госиздат, I949.

3. С.И.Иванов. Определение остаточных напряжений в пластинках методом полосок. Труды КуАИ, вып.48, I97I .