КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им.С.П.КОРОЛЁВА

Труды, выпуск 77, 1975 г.

В.С.Асланов, В.М.Белоконов

О ПРОСТРАНСТВЕННОМ ДВИЖЕНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА В НЕСТАЦИОНАРНОМ ПОТОКЕ

Рассматривается движение твердого тела, имеющего форму, близкую к сфере, в среде переменной плотности. Будем пренебрегать влиянием вращения тела относительно центра масс на движение его центра масс. Параметры траектории центра масс после численного интегрирования соответствующих уравнений движения будут известными функциями времени. Движение тела относительно центра масс, наоборот, сильно зависит от параметров траектории последнего и имеет колебательный характер.

Исследование колебательного движения можно выполнить, пользуясь методами численного интегрирования достаточно сложной системы дифференциальных уравнений. Однако применение численных методов для исследования высокочастотных колебательных процессов требует весьма сильного дробления шага интегрирования и, следовательно, большого количества машинного времени.

Число параметров, влияющих на рассматриваемое движение тела околосферической формы, достаточно велико. При проведении параметрических исследований требуется получать сотни вариантов решений задачи.

Совокупность параметров, определяющих движение тела, можно разделить на два типа: параметры, определяющие опорный вариант тела, и параметры, задающие отклонения от опорного варианта. При параметрическом синтезе обычно выбирают оптимальные параметры опорного варианта, в то время как отклонения параметров от опорного варианта рассматривают как неизбежные, вынужденные, но достаточно малые и ограниченные допусками.

Поэтому встает вопрос об исследовании движения опорного варианта – упрощенной модели тела рассматриваемого класса. В качестве опорного варианта возьмем тело сферической формы, для которого возможно существенное сокращение времени вычислений при использовании асимптотических методов. Решение предлагаемой задачи для малых углов атаки α было выполнено Г.Е.Кузмаком [I].

Рассмотрим пространственное движение твердого тела около неподвижной точки под воздействием восстанавливающего момента M и малого демпфирующего момента εM_g, здесь ε – малый параметр. При этом будем предполагать, что моменты слабо изменяются во времени и что эллипсоид инерции тела относительно центра сферы O есть эллипсоид вращения, $OXYZ$ – неподвижная система координат. Ось OZ параллельна вектору скорости. Подвижная система $Oxyz$ связана с телом, и ось Oz направлена по оси эллипсоида инерции. Угол атаки α есть угол между осью Oz и осью OZ. Переход от одной системы координат $(Oxyz)$ к другой $(OXYZ)$ осуществляется через углы Эйлера α, ψ, φ, где ψ – угол прецессии, φ – угол собственного вращения. Малый демпфирующий момент задан в проекциях на оси системы $Oxyz$ $(\varepsilon M_x^{\omega_x}\omega_x$, $\varepsilon M_y^{\omega_y}\omega_y$, $\varepsilon M_z^{\omega_z}\omega_z)$, здесь ω_x, ω_y, ω_z – проекции вектора угловой скорости на те же оси, $M_x^{\omega_x}=M_y^{\omega_y}\neq M_z^{\omega_z}$ – вращательные производные. Через $J_x=J_y\neq J_z$ обозначим моменты инерции тела относительно осей системы $Oxyz$. Лагранжевы уравнения движения можно записать в виде

$$\ddot{\alpha}+\frac{(G-R\cos\alpha)(R-G\cos\alpha)}{\sin^3\alpha}-M(t)=-\varepsilon m_x(t)\dot{\alpha}$$

$$\dot{R}=-\varepsilon m_z(t)R$$

$$\dot{G}=-\varepsilon\{m_x(t)G-[m_z(t)-m_x(t)]R\cos\alpha\}$$

$$\dot{\varphi}=-\frac{J_z}{J_x}R-\frac{(G-R\cos\alpha)\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \qquad (I)$$

$$\dot{\psi}=\frac{G-R\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$M(t)=-g(t)\sin\alpha,\quad m_x(t)=-\frac{M_x^{\omega_x}(t)}{J_x},\quad m_z(t)=-\frac{M_z^{\omega_z}(t)}{J_z}$$

Здесь $R=(\partial T/\partial\dot{\varphi})/J_x$; $G=(\partial T/\partial\dot{\psi})/J_x$; $T=\frac{1}{2}(J_x\omega_x^2+J_y\omega_y^2+J_z\omega_z^2)$ – кинетическая энергия вращения; $\tau=\varepsilon t+const$ – "медленное" время; $g(\tau)=Aq(\tau)$; $q(\tau)$ – скоростной напор; $A=const$.

Найдем решение системы (I) для невозмущенного движения (скоростной напор постоянен, демпфирование отсутствует, $\varepsilon=0$). Уравнение невозмущенного движения записывается следующим образом:

$$\ddot{\alpha}+\frac{(G-R\cos\alpha)(R-G\cos\alpha)}{\sin^3\alpha}+g\sin\alpha=0. \qquad (2)$$

Последние два уравнения из (I) интегрируются в квадратурах, если известно решение уравнения (2).

Запишем первый интеграл этого уравнения в виде

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{2}+\frac{(G-R\cos\alpha)^2}{2\sin^2\alpha}-g\cos\alpha=h. \qquad (3)$$

Вводя замену $u=\cos\alpha$, перепишем соотношение (3) следующим образом:

$$\dot{u}^2=2(h+gu)(1-u^2)-(G-Ru)^2\stackrel{\Delta}{=}\zeta(u). \qquad (4)$$

При больших положительных значениях u функция $\zeta(u)$ отрицательна, и наоборот. При $u=\pm I$ имеем $\zeta(u)=-(G-Ru)^2\leq 0$. Поэтому по крайней мере один из корней уравнения (пусть это будет u_3) меньше или равен – I.

Физическое движение реализуется только в том случае, когда $\dot{u}^2\geq 0$, а поскольку $u=\cos\alpha$, то два остальных корня кубического уравнения $\zeta(u)=0$ лежат в пределах $-1\leq u_2\leq u_1\leq 1$. Функция u изменяется периодически в пределах (u_2, u_1) . Решение уравнения (4) можно записать в виде

$$u=(u_1-u_2)cn^2[\omega(t-t_0)+K,\kappa]+u_2, \qquad (5)$$

где t_0 – постоянная интегрирования, $cn\,z$ – эллиптический косинус. $K(\kappa)$ – полный эллиптический интеграл I рода, κ – модуль,

$$\omega=\sqrt{\frac{(u_1-u_3)g}{2}}, \qquad \kappa=\sqrt{\frac{u_1-u_2}{u_1-u_3}} \qquad (6)$$

Из (5) следует, что u – периодическая функция времени с периодом $2K/\omega$.

Три корня уравнения $\zeta(u)=0$, входящие в решение (5), однозначно определяются функциями G , R , g , h . Если же в качестве независимой переменной принять один из корней u_i , например u_2 , тогда два других корня, а также h будут функциями от u_2 , G , R , g :

$$h=\frac{(G-Ru_2)^2}{2(1-u_2^2)^2}-gu_2 \tag{7}$$

$$u_1=\sqrt{1-\frac{2(au_2-b)}{(1-u_2^2)}+\left(\frac{a-bu_2}{1-u_2^2}\right)^2}-\frac{a-bu_2}{1-u_2^2} \tag{8}$$

$$u_3=-\sqrt{1-\frac{2(au_2-b)}{(1-u_2^2)}+\left(\frac{a-bu_2}{1-u_2^2}\right)^2}-\frac{a-bu_2}{1-u_2^2}, \tag{9}$$

где $a=(G^2+R^2)/4g$, $b=GR/2g$.

Перейдем теперь к рассмотрению исходной системы уравнений (I). За время одного колебания параметры G , R , g , h и u_i изменяются медленно. Система (I) при $m_x=0$ имеет адиабатический инвариант, которым является интеграл действия

$$\mathcal{J}(\tau)=\int_t^{t+T}\dot{\alpha}^2\,dt, \tag{I0}$$

где T – период колебания. При $m_x\neq 0$ интеграл действия изменяется по закону [I]:

$$\mathcal{J}=\mathcal{J}(\tau_0)\exp\left(-\int_{\tau_0}^{\tau}m_x\,d\tau\right).$$

Проведем замену переменных $y=\omega t$ в интеграле (I0) и в решении (5)

$$\mathcal{J}=2\int_0^K\omega\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2dy. \tag{II}$$

Найдем производную, входящую в подынтегральное выражение

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y}=-\frac{2(u_1-u_2)\,sn\,z\,cn\,z\sqrt{1-k^2 sn^2 z}}{\sqrt{1-[(u_1-u_2)cn^2 z+u_2]^2}}, \tag{I2}$$

где $sn\,z$ – эллиптический синус.

Подставим эту производную в интеграл (II) и вычислим его относительно полных эллиптических интегралов [2] , в результате получим

$$\mathcal{J}=4\omega[c_1K(k)+c_2E(k)+c_3\Pi(k,n_1)+c_4\Pi(k,n_2)], \tag{I3}$$

где

$$c_1=4k^2\cdot\left(1+\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right),\qquad c_2=4$$

$$c_3 = -2(1-u^2)\left(1+\frac{\kappa^2}{n_1}\right), \qquad c_4 = -2(1+u_2)\left(1+\frac{\kappa^2}{n_2}\right) \tag{I4}$$

$$n_1 = \frac{u_1-u_2}{1-u_1}, \qquad n_2 = -\frac{u_1-u_2}{1+u_1}. \tag{I5}$$

Здесь $E(\kappa)$, $\Pi(\kappa,n)$ – полные эллиптические интегралы II и III рода.

Таким образом, получено трансцендентное уравнение

$$4\omega[c_1K(\kappa)+c_2E(\kappa)+c_3\Pi(\kappa,n_1)+c_4\Pi(\kappa,n_2)]-\mathcal{J}(\tau_0)exp(-\int_{\tau_0} m_x d\tau)=0, \tag{I6}$$

которое представляет собой не что иное, как неявное задание функции $u_2(\tau)$. Разрешая это уравнение относительно u_2, по формулам (7), (8) и (9) всегда можно подсчитать энергию системы h и два других корня уравнения $\zeta(u)=0: u_1, u_3$. Зная корни u_1 и u_2, в любой момент времени по формуле (6) можно вычислить частоту колебаний ω. При $m_x \neq 0$ и $m_y \neq 0$ совместно с решением уравнения (I6) следует интегрировать второе и третье уравнения системы (I), однако вместо $\cos\alpha$ в третье уравнение необходимо подставить его среднее значение

$$\bar{u} = u_2 + (u_1-u_2)\frac{1}{K}\int_0^K cn^2(y+K,\kappa)\,dy =$$

$$= u_2 + (u_1-u_2)[E-(1-\kappa^2)K]/(\kappa^2 K).$$

Таким образом, получено неявное решение для огибающей кривой изменения углов атаки: $\alpha_{min} = \arccos u_1$, $\alpha_{max} = \arccos u_2$. Это решение удобно использовать при параметрическом синтезе опорного варианта, поскольку оно избавляет нас от необходимости выполнять численное интегрирование дифференциальных уравнений (I).

Литература

I. Кузмак Г.Е. Динамика неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу. "Наука", М., 1970.

2. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Физматгиз, М., 1963.