КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С.П. КОРОЛЕВА
Труды, выпуск 66, 1973 г.

И.А.Бережной, Н.В.Герасимов

О НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЯХ СЛОЖНЫХ СРЕД С УПРАВЛЯЕМЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

На основе идей работы [1] рассматриваются модели сложных сред, построенных на основе механизмов упругости и вязкости с управляемыми параметрами. В частности, исследуются свойства обобщенных моделей Фойгта и Максвелла - моделей Фойгта и Максвелла с переменными вязкостью и упругостью.

1. Рассмотрим обобщенную модель Фойгта. Связь между напряжением σ и деформацией ε в ней определяется уравнением

$$\mu(t)\dot{\varepsilon} + c(t)\varepsilon = \sigma(t), \tag{1}$$

где $\mu(t)$ - закон изменения вязкости, $c(t)$ - закон изменения жесткости.

При силовом нагружении $\sigma = \sigma_0 \sin(\omega t + \varphi)$ и изменении определяющих параметров по закону

$$\mu(t) = \mu_0(1+\lambda_1 \sin\omega t), \quad c(t) = c_0[1+\lambda_2 \sin(\omega t + \varphi_2)] \tag{2}$$

уравнение (1) примет вид

$$\mu_0(1+\lambda_1 \sin\omega t)\dot{\varepsilon} + c_0[1+\lambda_2 \sin(\omega t + \varphi_2)]\varepsilon = \sigma_0 \sin\omega t. \tag{3}$$

Переходя к безразмерному времени $\tau = \omega t$ и полагая $\lambda_1 \in [0, 1)$, перепишем уравнение (3)

$$\varepsilon' + \frac{c_0}{\omega\mu_0}\,\frac{1+\lambda_2 \sin(\tau+\varphi_2)}{1+\lambda_1 \sin\tau}\,\varepsilon = \frac{\sigma_0}{\omega\mu_0}\,\frac{\sin(\tau+\varphi)}{1+\lambda_1 \sin\tau}. \tag{4}$$

Из теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами известно [2], что неоднородное уравнение с Т-периодическими коэффициентами имеет единственное Т-периодическое решение, когда соответствующее ему однородное уравнение асимптотически устойчиво. Нетрудно показать, что условие асимптотической устойчивости тривиального решения однородного уравнения имеет вид

$$-\frac{c_0}{\omega\mu_0}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\lambda_1^2}}+\frac{\lambda_2\cos\varphi}{\lambda_1}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-\lambda_1^2}}\right)\right]<0. \qquad (5)$$

Поскольку $\lambda_1\in[0,1)$ и $c_0/\omega\mu_0>0$, то условие устойчивости (5) можно переписать в виде

$$\lambda_2\cos\varphi_2<\frac{1+\sqrt{1+\lambda_1^2}}{\lambda_1}. \qquad (6)$$

Отсюда видно, что для положительных $\mu(t)$ и $c(t)$ тривиальное решение однородного уравнения, полученного из (4), всегда асимптотически устойчиво. Следовательно, неоднородное уравнение (4) при положительных $\mu(t)$ и $c(t)$ имеет единственное 2π -периодическое решение, которое, согласно [2], можно получить в виде

$$\varepsilon(\tau)=\left[1-e^{\varkappa(2\pi)}\right]^{-1}\int^{2\pi}\frac{\sigma_0\sin(\tau-v+\varphi)dv}{b(-v)e^{\varkappa(-v)}}, \qquad (7)$$

где $b(\tau)=(1+\lambda_1\sin\tau)^{-\frac{c_0\lambda_2\sin\varphi_2}{\omega\mu_0\lambda_1}}$

$$\varkappa(\tau)=-\frac{c_0}{\omega\mu_0}\left\{\psi(\tau)+\frac{\lambda_2\cos\varphi}{\lambda_1}\left[\tau-\psi(\tau)\right]\right\}$$

$$\psi(\tau)=\frac{2}{\sqrt{1-\lambda_1^2}}\left(\mathrm{Arctg}\,\frac{\mathrm{tg}\,0.5\tau+\lambda_1}{\sqrt{1-\lambda_1^2}}-\mathrm{arctg}\,\frac{\lambda_1}{\sqrt{1-\lambda_1^2}}\right.$$

Однако интеграл в (7) не поддается представлению в элементарных функциях. Поэтому, воспользовавшись приближенным методом решения нелинейных уравнений [3], найдем приближенное решение уравнения (7). Перепишем уравнение (4) в виде

$$\varepsilon'+c_1\varepsilon+\Phi(\tau)=\sigma_1\sin(\tau+\varphi), \qquad (8)$$

где $\Phi(\tau)=\lambda_1\sin\tau\cdot\varepsilon'+c_1\lambda_2\sin(\tau+\varphi_2)\cdot\varepsilon,$

$$c_1=c_0/\omega\mu_0, \qquad \sigma_1=\sigma_0/\omega\mu_0.$$

Выполнив преобразование Лапласа, получим изображающее уравнение

$$(s+c_1)E(s)-\varepsilon(+0)+\mathcal{L}\{\Phi(\tau)\}=\frac{\sigma_1(s\sin\varphi+\cos\varphi)}{(s^2+1)}, \qquad (9)$$

здесь $\mathcal{L}$ - символ прямого преобразования Лапласа.

Поскольку начальное условие $\varepsilon(0)$ не оказывает влияния на установившийся процесс деформирования, принимаем $\varepsilon(0)$ равным нулю. Тогда, отбросив член $\mathcal{L}\{\Phi(\tau)\}$, получим нулевое приближение

$$E_0(s) = \frac{\sigma_1 s(\sin\varphi + \cos\varphi)}{(s^2+1)(s+C_1)}, \tag{10}$$

которому в пространстве оригиналов соответствует приближение

$$\varepsilon_0(\tau) = A_1\cos\tau + A_2\sin\tau + D_1 e^{-c_1\tau}, \tag{11}$$

где $A_1 = \dfrac{\sigma_1(c_1\sin\varphi - \cos\varphi)}{c_1^2+1}$, $\quad A_2 = \dfrac{\sigma_1(\sin\varphi + c_1\cos\varphi)}{c_1^2+1}$,

D_1 - некоторая постоянная. Величина D_1 нас не интересует, т.к. член $D_1 e^{-c_1\tau}$ стремится к нулю при $\tau \to \infty$.

Подставив нулевое приближение функции $\Phi(\tau)$ в уравнение (8), аналогичным образом находим 2π -периодическое решение в первом приближении

$$\varepsilon_1(\tau) = \langle\varepsilon_1\rangle + A_1\cos\tau + A_2\sin\tau + A_3\cos 2\tau + A_4\sin 2\tau, \tag{12}$$

где

$$A_3 = (-\lambda_1 - c_1\lambda_2\sin\varphi_2 + \lambda_2\cos\varphi_2)\frac{c_1A_1}{2(c_1^2+4)} +$$

$$+(\lambda_1 + c_1\lambda_2\sin\varphi_2 + c_1^2\lambda_2\cos\varphi_2)\frac{A_2}{2(c_1^2+4)},$$

$$A_4 = (4\lambda_1 + 4c_1\lambda_2\sin\varphi_2 - c_1^2\lambda_2\cos\varphi_2)\frac{A_1}{4(c_1^2+4)} -$$

$$-(\lambda_1 + c_1\lambda_2\sin\varphi_2 + 4\lambda_2\cos\varphi_2)\frac{c_1A_2}{4(c_1^2+4)}.$$

Постоянная составляющая деформации определяется формулой

$$\langle\varepsilon_1\rangle = \frac{\sigma_0\omega\mu_0}{2(c_0^2+\omega^2\mu_0^2)}\Big[(\lambda_1 - \lambda_2\cos\varphi_2 - \frac{c_0\lambda_2}{\omega\mu_0}\sin\varphi_2)\sin\varphi -$$

$$-\Big(\frac{\lambda_1\omega\mu_0}{c_0} + \frac{\lambda_2 c_0}{\omega\mu_0}\cos\varphi_2 - \lambda_2\sin\varphi_2\Big)\cos\varphi\Big]. \tag{13}$$

Таким образом, в отличие от модели Фойгта, обобщенная модель Фойгта при периодической силовой нагрузке и периодическом изменении вязкости и жесткости приобретает постоянную составляющую деформации $\langle\varepsilon\rangle$, величина и знак которой зависят от фазовых соотношений между нагрузкой и определяющими параметрами.

Исследуем влияние параметров $\varphi, \omega\mu_0, c_0$ и λ_1 на величину постоянной составляющей деформации в частном случае, когда жесткость упругого элемента в обобщенной модели Фойгта постоянна ($\lambda_2 = 0$).

В этом случае

$$\langle \varepsilon_1 \rangle = \frac{\lambda_1 \sigma_0 \omega\mu_0 (c_0 \sin\varphi - \omega\mu_0 \cos\varphi)}{2c_0(c_0^2 + \omega^2\mu_0^2)}. \qquad (14)$$

Из (14) следует, что для ненулевых λ_1, σ_0, c_0 и $\omega\mu_0$ постоянная составляющая равна нулю при

$$\varphi = \mathrm{Arctg}\, \omega\mu_0 c_0^{-1}. \qquad (15)$$

Экстремальных значений постоянная составляющая деформации $\langle \varepsilon_1 \rangle$ достигает, когда

$$\frac{\partial \langle \varepsilon_1 \rangle}{\partial \varphi} = \frac{\lambda_1 \sigma_0 \omega\mu_0 (c_0 \cos\varphi + \omega\mu_0 \sin\varphi)}{2c_0(c_0^2 + \omega^2\mu_0^2)} = 0, \qquad (16)$$

т.е. при

$$\varphi = \mathrm{Arctg}(-c_0/\omega\mu_0). \qquad (17)$$

При положительных $c_0, \omega\mu_0, \sigma_0$ и λ главное значение экстремального фазового угла $\varphi_э$ может изменяться в пределах

$$-0{,}5\pi \le \varphi_э = \mathrm{arctg}(-c_0/\omega\mu_0) \le 0, \qquad (18)$$

поэтому

$$\left.\frac{\partial^2 \langle \varepsilon_1 \rangle}{\partial \varphi^2}\right|_{\varphi_э} = \frac{\lambda_1 \sigma_0 \omega\mu_0 (-c_0 \sin\varphi_э + \omega\mu_0 \cos\varphi_э)}{2c_0(c_0^2 + \omega^2\mu_0^2)} > 0. \qquad (19)$$

Отсюда следует, что при $\varphi = \varphi_э$ постоянная составляющая минимальна.

Величина постоянной составляющей максимальна для значения $\varphi = \varphi_э + \pi$, т.к. $\left.\frac{\partial^2 \langle \varepsilon_1 \rangle}{\partial \varphi^2}\right|_{\varphi_э + \pi} < 0$.

В силу периодичности $\mathrm{Arctg}(-c_0/\omega\mu_0)$ имеем

$$\langle \varepsilon_1 \rangle_э = \begin{cases} \langle \varepsilon_1 \rangle_{max} & \text{при } \varphi = \varphi_э + (1+2k)\pi \\ \langle \varepsilon_1 \rangle_{min} & \text{при } \varphi = \varphi_э + 2k\pi, \end{cases} \qquad (20)$$

где $k = 0, 1, 2, 3 \ldots$.

Из (14) видно, что

$$|\langle \varepsilon_1 \rangle_{min}| = \langle \varepsilon_1 \rangle_{max} = \frac{\lambda_1 \sigma_0 \omega\mu_0}{2c_0\sqrt{c_0^2 + \omega^2\mu_0^2}}. \qquad (21)$$

Таким образом, при изменении φ постоянная составляю-
[щая де]формации $\langle \varepsilon_1 \rangle$ обобщенной модели Фойгта ограничена

$$|\langle \varepsilon_1 \rangle| \leq \frac{\lambda_1 \sigma_0 \omega \mu_0}{2c_0\sqrt{c_0^2+\omega^2\mu_0^2}}$$

Максимальное значение постоянной составляющей прямо пропорционально амплитуде нагрузки σ_0 и коэффициенту модуляции λ_1. При $\omega\mu_0 = 0$ постоянная составляющая равна нулю. С увеличением $\omega\mu_0$ она растёт до некоторого предельного значения $\lim\limits_{\omega\mu \to \infty} \langle \varepsilon_1 \rangle_{max} = \frac{\lambda_1 \sigma_0}{2c_0}$. Для абсолютно твердого тела ($c_0 = \infty$) постоянная составляющая деформации также равна нулю. С уменьшением жесткости упругого элемента $\langle \varepsilon \rangle$ увеличивается и при $c = 0$ неограниченно растет.

2. Рассмотрим обобщенную модель Максвелла. Связь между напряжением и деформацией в ней определяется уравнением

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{1}{c(t)}\dot{\sigma} + \left[\frac{1}{\mu(t)} - \frac{\dot{c}(t)}{c^2(t)}\right]\sigma . \qquad (22)$$

При силовом нагружении $\sigma = \sigma_0 \sin(\omega t + \varphi)$ и изменении определяющих параметров по закону (2) уравнение (22) примет вид

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_0 \omega \cos(\omega t + \varphi)}{c_0[1+\lambda_2 \sin(\omega t+\varphi_2)]} + \left\{\frac{1}{\mu_0(1+\lambda_1 \sin\omega t)} - \right.$$
$$\left. - \frac{\omega\lambda_2 \cos(\omega t+\varphi_2)}{c_0[1+\lambda_2 \sin(\omega t+\varphi_2)]^2}\right\} \sigma_0 \sin(\omega t + \varphi) . \qquad (23)$$

Интегрируя (23) при $\varphi_2 = \varphi$, получим решение

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0 \cos\varphi}{\mu_0 \lambda_1}\left(t - \frac{2}{\omega\sqrt{1-\lambda^2}} \operatorname{Arctg} \frac{\operatorname{tg} 0{,}5t + \lambda_1}{\sqrt{1-\lambda_1^2}}\right. +$$
$$+ \frac{\sigma_0 \sin\varphi}{\omega\mu_0 \lambda_1} \ln(1+\lambda_1 \sin\omega t) - \frac{\sigma_0}{c_0\lambda_2[1-\lambda_2 \sin(\omega t+\varphi)]} + d , \qquad (24)$$

где d – произвольная постоянная, определяемая из начальных условий.

Постоянная составляющая скорости деформации при $\varphi_2 = \varphi$ будет

$$\langle \dot{\varepsilon} \rangle = - \frac{\sigma_0 \lambda_1}{\mu_0 (1+\sqrt{1-\lambda_1^2} - \lambda_1^2)} \cos\varphi . \qquad (25)$$

Отметим интересные свойства такой модели. При гармоническом силовом нагружении и гармоническом изменении определяющих параметров обобщенная модель Максвелла деформируется с некоторой постоянной составляющей скорости (25), т.е. с течением времени деформация неограниченно растет. Средняя скорость деформации не зависит от частоты и пропорциональна $\cos\varphi$.

При исследовании свойств моделей Фойгта и Максвелла с управляемыми параметрами обнаружены интересные эффекты. Так, если магнитовязкую [5] или электровязкую [6] жидкость поместить во внешнее периодическое силовое поле касательных напряжений и с тем же периодом изменять ее вязкость, то появи[тся] постоянная составляющая скорости деформации, а следовательно направленное течение жидкости. Скорость течения и ее направле[-]ние зависят от фазовых соотношений между законом изменения силового поля и вязкости. Эффект появления направленного тече[-]ния такой жидкости наблюдался экспериментально. На той же экспериментальной установке получен эффект появления постоянной составляющей деформации обобщенной модели Фойгта.

Проведенные исследования свойств моделей Фойгта и Максвелла с управляемыми определяющими параметрами позволили предложить некоторые полезные технические приложения [4].

Литература

I. Ивлев Д.Д. ДАН СССР, т.I48, № I. 1963.
2. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. "Наука", I972.
3. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z - преобразование. "Наука", I97I.
4. Бережной И.А., Герасимов Н.В., Ивлев Д.Д. Гидроусилитель, Авторское свидетельство № 352036 с приоритетом от 30.09. I970.

5. Joseph L. Neuringer and Ronald E. Rosenweig. The Physics of Fluids, vol. 7., N12, December 1964.
6. Klass D. and Martinck T. Journal of Appl. Physics, vol. 38, N1. January 1967.