

В.Н.Красовский

## О КАЧЕНИИ УПРУГОГО КОЛЕСА ПО ЖЕСТКОМУ ОСНОВАНИЮ

Работа фрикционного катящегося контакта в условиях сухого трения рассмотрена впервые в статье [8], где показано, что в контакте существуют области сцепления и скольжения. Схема работы контакта [8] положена в основу работ [1,2,6-8], где дополнительно принято, что зона сцепления расположена на стороне входа в контакт.

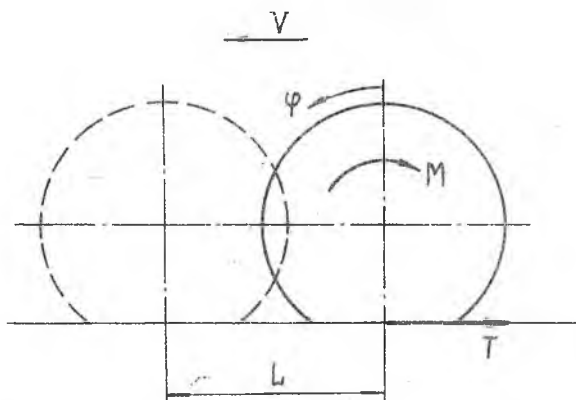


Рис. I

В работе [4] рассмотрено качение абсолютно жесткого катка по модели упругого основания без введения каких-либо гипотез о характере явления. В настоящей работе рассматри-

вается качение упругого катка по абсолютно жесткому основанию также без введения дополнительных предположений.

I. Рассмотрим качение упругого цилиндрического катка по ровному абсолютно жесткому основанию в тормозном режиме (рис. I). Процесс качения считаем вполне упругим и установившимся, а поверхности взаимодействующих тел гладкими. На каток действует тормозной момент  $M$  и касательная (тормозная) сила  $T$ .

При повороте оси упругого свободного катка ( $M = T = 0$ ) на фиксированный угол  $\varphi$  ось колеса переместится на расстояние  $L_0$ . При действии тормозного момента горизонтальное перемещение  $L$  оси колеса увеличивается за счет так называемого кажущегося скольжения, так что  $L > L_0$ .

Термин "кажущееся скольжение" отражает тот факт, что увеличение  $L$  по сравнению с  $L_0$  в общем случае может вызываться двумя разными физическими причинами. Во-первых, это увеличение может происходить вследствие упругой тангенциальной деформации элементов беговой дорожки при действии тормозного момента; во-вторых, оно может вызываться кинематическим скольжением элементов беговой дорожки катка относительно опорной поверхности.

В соответствии с этим представим

$$L = L_0 + \Delta L_0 + L_s, \quad (1)$$

где  $\Delta L_0$  - увеличение пути  $L_0$  вследствие упругой тангенциальной деформации беговой дорожки катка при  $T > 0$ ;  $L_s$  - часть пути, проходимая скольжением катка.

Введем согласно [8] коэффициент кажущегося скольжения

$$\xi = \frac{L - L_0}{L} \Big|_{\varphi = \text{const}} \quad (2)$$

Подставляя в (2) значение (1), получим

$$\xi = \frac{\Delta L_0}{L} + \frac{L_s}{L} \quad (3)$$

Обозначив через  $S = L_s/L$  коэффициент кинематического скольжения и используя для характеристики упругих свойств материала беговой дорожки катка в тангенциальном направлении величину  $\alpha = \Delta L_0/L_0$ , представим соотношение (3) в виде

$$\xi = \frac{\alpha + S}{1 + \alpha} \quad (4)$$

2. Определение функций  $\alpha(T)$ ,  $S(T)$  и величины коэффициента  $\xi(T)$  представляет собой задачу большой математической трудности [3], поскольку необходимо в общей постановке решать контактную задачу теории упругости с учетом закона сохранения энергии.

Исходя только из общих свойств упругого фрикционного контакта и не рассматривая подробно работы контакта, можно указать на важные свойства функций  $\xi(T)$  и  $S(T)$ .

Вводя понятие радиуса качения катка  $r_k = \frac{L}{\varphi}$ , представим выражение (2) в виде

$$\xi = 1 - \frac{r_0}{r_k}, \quad (5)$$

где  $r_0$  - радиус качения свободного катка. Выражая величину радиуса качения через поступательную скорость оси катка  $V$  и угловую скорость его вращения  $\omega$  в виде  $r_k = \frac{V}{\omega}$ , представим выражение (5) в форме

$$\xi = 1 - \frac{\omega}{\omega_0} \Big|_{V = const}, \quad (6)$$

где  $\omega_0$  - угловая скорость вращения свободного катка.

При качении свободного катка ( $T=0$ ) коэффициент кажущегося скольжения  $\xi=0$ , поскольку  $\omega = \omega_0$ . При реализации катком предельной величины касательной силы  $T^*$ , равной силе трения скольжения Кулона, наступает блокировка катка: каток не вращается ( $\omega=0$ ) и величина  $\xi=1$ . Рассматривая равномерное увеличение касательной силы от нуля до  $T=T^*$  на конечном интервале времени, нетрудно установить, что величина угловой скорости вращения катка  $\omega$  является непрерывной функцией касательной силы. Согласно (6) и величина  $\xi$  должна быть также непрерывной функцией касательной силы.

Из выражения (4) следует, что и функция  $S(T)$  является также непрерывной, так что при  $T < T^*$  в контакте должно существовать кинематическое скольжение.

Непрерывность функций  $\xi(T)$  и  $S(T)$  в интервале от нуля до  $T=T^*$  является общим свойством фрикционного катящегося контакта и определяется тем, что упругое тело не может иметь бесконечно больших ускорений.

3. Величины  $\alpha(T)$  и  $S(T)$  имеют конкретный кинематический

смысл. Обозначим через  $dl_0$  длину элемента в площадке контакта в тангенциальном направлении при свободном качении катка.

Поскольку при реализации касательной силы  $T < T^*$  в зоне контакта должна существовать область сцепления (покоя), свободная от касательных усилий, то для элемента  $dl$  беговой дорожки катка в этой области можно согласно (I) записать

$$dl = dl_0 + \Delta dl_0 + dl_s. \quad (7)$$

Величина  $\Delta dl_0$  учитывает упругое тангенциальное увеличение длины  $dl_0$  при реализации касательной силы вследствие того, что при  $M > 0$  в контакт входит элемент беговой дорожки длиной  $dl_0 + \Delta dl_0$ . Нетрудно видеть, что  $\alpha = \frac{\Delta dl_0}{dl_0}$ .

Упругое удлинение  $dl_s$  возникает из-за того, что на входе в контакт расположена зона скольжения. Наличие этой зоны является кинематическим следствием общих свойств (4) фрикционного контакта. Действующие в этой зоне переменные касательные усилия вызывают дополнительное удлинение элемента  $dl_0 + \Delta dl_0$ , равное  $dl_s = s \cdot dl$ .

4. В работах [1, 2, 6-8] нахождение величины  $\xi$  выполнено на основе контактной теории Герца-Беляева при введении упрощающих предположений. Во-первых, деформации катка за пределами площадки контакта не учитываются [1, 2, 7]; во-вторых, принимается, что площадка контакта состоит из двух зон (зоны сцепления и зоны скольжения), причем зона сцепления расположена на стороне входа в контакт [1, 2, 6-8]. Решение на основе этих гипотез рассматривается только как задача теории упругости, без учета механики процесса качения.

Нетрудно видеть (4), что эти допущения не учитывают всех особенностей работы контакта, в связи с чем результаты работ [1, 2, 6-8] имеют условный характер. Так, применительно к рассматриваемому случаю качения упругого катка по абсолютно жесткому основанию гипотезы [1, 2, 7] приводят к тому, что каток работает при  $T < T^*$  как абсолютно жесткое тело ( $\alpha = 0$  и  $s = 0$ ) и величина коэффициента  $\xi = 0$ ; при достижении  $T = T^*$  наступает мгновенная блокировка катка при бесконечно

большом угловом ускорении. Согласно работам [ 6, 8 ] при  $T = T^*$  имеем  $\xi < 1$ , после чего скачком наступает блокировка катка.

Представление величины коэффициента кажущегося скольжения в форме (4) позволяет в общем виде построить теорию фрикционно-го катящегося контакта, поскольку в случае взаимодействия двух упругих тел величина функции  $\alpha$  учитывает их обобщенные упругие свойства. Частный случай этой теории изложен в работе [ 5 ] применительно к анализу качения такого сложного упругого тела, как колесо с пневматической шиной.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Глаголев Н.И. ПММ, 1945, т.9, вып.4.
2. Вирабов Р.В. Машиноведение, 1967, № 2.
3. Ишлинский А.Ю. ПММ, 1938, т.2, вып.2.
4. Ишлинский А.Ю. Изв. АН СССР, ОТН, 1956, № 6.
5. Красовский В.Н. Труды КуАИ, вып.54, Куйбышев, 1971.
6. Carter F.W. Proc. Roy. Soc., Ser. A, vol.112, 1926.
7. Fromm H. ZAMM, 1927, Bd.7, H.1.
8. Reynolds O. Phil. Trans. Roy. Soc., London, 1876, vol.166.