КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С.П. КОРОЛЕВА
Труды, выпуск 66, 1973 г.

Л.И.Кудряшев, Е.Н.Рябинова

НАХОЖДЕНИЕ ВТОРОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ В ЗАДАЧАХ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Задача нестационарной теплопроводности в первом приближении рассматривалась в статье [I]. Второе приближение задачи в силу линейности исходной системы возьмем в виде суммы

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = C_1 f_1(x_1, x_2, x_3) + C_2 f_2(x_1, x_2, x_3),$$

где θ_1 – первое приближение задачи.

Аппроксимирующие функции $f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3)$ выбираются с учетом уравнения поверхности $F(x_1, x_2, x_3) = 0$

$$f_1 = 1 - B_1(1-F), \quad f_2 = [1 - B_2(1-F)](1-nF).$$

Коэффициент n определяется из условия ортогональности функций

$$\int_V f_1 \cdot f_2 \, dV = 0.$$

Произведя преобразования, получим

$$n = \frac{\int_V [1-B_1(1-F)][1-B_2(1-F)]dV}{\int_V F_1[1-B_1(1-F)][1-B_2(1-F)]dV} = n(B_1, B_2). \qquad (I)$$

Коэффициент аппроксимации B_1 определяется из граничного условия Ш рода, которое в интегральной форме записывается в виде

$$-\int_V \nabla^2 f_1 \, dV = \int_F Bi \, f_{1,w} \, dF.$$

Для отыскания n и B_2 необходимо решить уравнение

$$-\int_V \nabla^2 \{[1-B_2(1-F)](1-nF)\} dV = (1-B_2)\int_F Bi(1-nF)\, dF$$

совместно с (I).

Собственные числа β_1^2 и β_2^2 можно определить из интегрального условия [2]

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial Fo}\int_V \theta_m^2 dV = -\int_F Bi\,\theta_m^2 dF - \int_V (grad\,\theta_m)^2 dV \quad (m=1,2). \qquad (2)$$

Подставляя θ_1 и θ_2 в это условие, получим дифференциальные уравнения относительно C, решения которых имеют вид

$$C = C_{m.o}\,\psi(Fo). \quad (m=1,2).$$

Коэффициенты $C_{m,o}$ определяются из условия минимума функционала относительно начального условия

$$\delta\int_V \left\{\theta_0(x_1,x_2,x_3) - \sum_{m=1}^{2} C_{m,o} f_m\right\}^2 dV = 0. \qquad (3)$$

Рассмотрим в качестве примера нахождение второго приближения для задачи о нестационарной теплопроводности в анизотропном параллелепипеде со сторонами $2\ell_x$, $2\ell_y$, $2\ell_z$ и осями симметрии, совпадающими с главными осями теплопроводности при граничном условии I рода. Эта задача описывается системой

$$\frac{\partial\theta}{\partial Fo} = \lambda_1\frac{\partial^2\theta}{\partial x_1^2} + \lambda_2\frac{\partial^2\theta}{\partial x_2^2} + \lambda_3\frac{\partial^2\theta}{\partial x_3^2},$$

$$Fo = 0, \quad \theta = \theta_o(x_1, x_2, x_3) = 1,$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = \pm 1, \qquad \theta_W = 0,$$

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_x}{\lambda_o}, \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_y}{\lambda_o}, \quad \lambda_3 = \frac{\lambda_z}{\lambda_o}, \quad \lambda_o = \sqrt[3]{\lambda_{x,o}\cdot\lambda_{y,o}\cdot\lambda_{z,o}}. \qquad (4)$$

Применяя преобразование координат [3]

$$X_n = \frac{x_n}{\sqrt{\lambda_n}}, \qquad (n = 1, 2, 3),$$

приведем систему уравнений (4) к виду

$$\frac{\partial\theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2\theta}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial X_3^2}$$

$$Fo = 0, \quad \theta = \theta_o(X_1, X_2, X_3) = 1$$

$$\lambda_1 X_1^2 = \lambda_2 X_2^2 = \lambda_3 X_3^2 = 1, \quad \theta_W = 0$$

Решение задачи представим в виде произведения решений для трех неограниченных пластин, пересечением которых образован параллелепипед [4]

$$\theta(X_1, X_2, X_3, Fo) = \prod_{i=1}^{3} \theta_i(X_i, Fo), \qquad i = 1, 2, 3,$$

где $\theta_i(X_i, Fo)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \theta_i(X_i, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta_i(X_i, Fo)}{\partial X_i^2}$$

при $Fo = 0$, $\theta_i(X_i, 0) = 1$, $\lambda_i X_i^2 = 1$, $\theta_W = 0$.

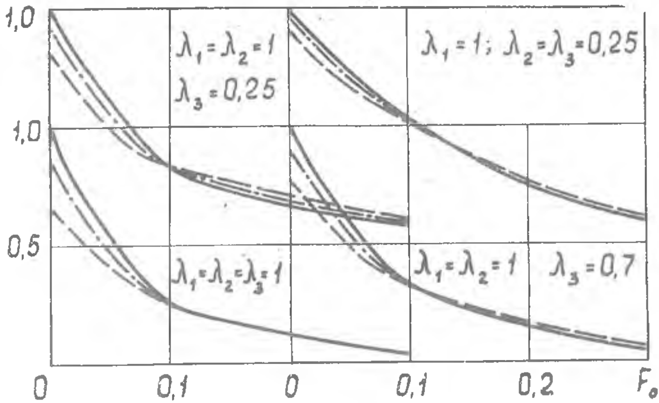

Рис. I.

Аппроксимирующие функции в новых переменных записываются следующим образом:

$$f_{i,1} = 1 - \lambda_i X_i^2, \qquad f_{i,2} = (1 - \lambda_i X_i^2)(1 - n\lambda_i X_i^2).$$

Из выражений (2) и (3) после вычислений получим

$$\beta_{i,1} = 2{,}5\lambda_i, \quad \beta_{i,2} = 25{,}5\lambda_i, \quad C_{1,0} = \frac{5}{4}, \quad C_{2,0} = -\frac{3}{8}.$$

Окончательно второе приближение для пластины неограниченной длины запишется так :

$$\theta = \frac{5}{4}(1-\lambda_i X_i^2)\exp(-2{,}5\lambda_i Fo) -$$

$$-\frac{3}{8}(1-8\lambda_i X_i^2 + 7\lambda_i X_i^4)\exp(-25{,}5\lambda_i Fo).$$

Средняя температура

$$\bar{\theta} = \sqrt{\lambda_i}\int_0^{1/\sqrt{\lambda_i}} \theta dX_i = \frac{5}{6}\exp(-2{,}5\lambda_i Fo) + 0{,}1\exp(-25{,}5\lambda_i Fo).$$

На рис. I дано сравнение решений задачи для средних температур при различных λ_i. Сплошной линией изображено точное решение, взятое из [4], пунктирной линией - первое приближение [I], штрих-пунктирной - второе приближение. Видим, что второе приближение намного улучшает решение задачи даже для граничных условий I рода, т.е. когда имеет место наибольшая неравномерность температурного поля по сечению параллелепипеда.

Литература

I. Кудряшев Л.И., Рябинова Е.Н. Приближенные методы решения задач нестационарной теплопроводности. Труды КуАИ, вып. 66, I973.

2. Меньших Н.Л. Материалы 8-ой Всесоюзной конференции по вопросам испарения, горения и газовой динамики дисперсных систем. Одесса, I968.

3. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. ОНТИ, I937.

4. Лыков А.В. Теория теплопроводности. Высшая школа, I967.