КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им.С.П.КОРОЛЕВА
Труды, выпуск 63, 1972 г.

О.Ф.Меньших

К ТЕОРИИ БЕГУЩИХ ВОЛН ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Настоящая работа является продолжением [I] . Произведено упрощение алгоритма выделения бегущих волн, предложена классификация уравнений, допускающих такие решения.

I. Рассмотрим уравнение вида

$$F(u_{ij}, p_i, u, x_i) = 0$$

$$u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \quad p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad (i,j = 1,2,\ldots,n). \qquad (I)$$

Пусть F — многочлен по u_{ij} , u , x_i , коэффициенты которого зависят от p_1 , p_2 ,...., p_n и являются достаточно гладкими функциями.

Частные решения (I), на которых общий ранг матрицы $M = \| u_{ij} \|$ равен r ($1 \le r < n$), назовем бегущими волнами ранга r [I] . Бегущие волны уравнения (I) вкладываются в понятие решений с дифференциальными связями [2] , [3] . Эти связи будем брать в виде

$$p_{r+\alpha} = f_\alpha(p_1, p_2, \ldots p_r), \quad (\alpha = 1,2,\ldots,n-r). \qquad (2)$$

Задача выделения бегущих волн ранга r сводится, таким образом, к исследованию на совместность переопределенной системы (I),(2).

В [I] был предложен алгоритм выделения таких решений уравнения (I):

I) на (I) необходимо подействовать касательным преобразованием

$$\Phi(p_1,\dots,p_r,x_{r+1},\dots,x_n)=-u+\sum_{i=1}^{r}p_i x_i$$
$$x_i=\frac{\partial\Phi}{\partial p_i},\quad \frac{\partial u}{\partial x_j}=-\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\quad (i=1,\dots,r;\ j=r+1,\dots,n); \qquad (3)$$

2) в преобразованное уравнение подставить

$$\Phi=\psi(p_1,\dots,p_r)-\sum_{i=1}^{n-r}p_{r+i}(p_1,\dots,p_r)x_{r+i}; \qquad (4)$$

3) наконец, произвести расщепление последнего уравнения по переменным x_{r+1}, $x_{r+2},\dots,x_n$, что приведет к некоторой, в общем случае переопределенной, системе уравнений $L=0$ относительно $n-r+1$ функций ψ, $p_{r+1},\dots,p_n$.

Имеет место следующая

Теорема I. Если функция F в (I) не зависит от x_1, $x_2,\dots,x_3$, то система бегущих волн произвольного ранга не может быть противоречивой.

На доказательстве этой теоремы здесь останавливаться не будем.

2. Приведенный алгоритм при $n\geqslant 3$ является достаточно громоздким, поэтому упростим его. После дифференцирования (2) по всем переменным x_1, $x_2,\dots,x_n$ придем к следующим формулам:

$$u_{r+j,\nu}=\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial f_j(p_1,\dots,p_r)}{\partial p_i}u_{i\nu}$$
$$u_{r+j,\mu}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial f_j(p_1,\dots,p_r)}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial f_j(p_1,\dots,p_r)}{\partial p_k}u_{ik} \qquad (5)$$
$$(\nu=1,2,\dots,r,\quad \mu,j=1,2,\dots,n-r).$$

Подставляя (5) в (I), получим уравнение

$$F_1\left(u_{ij},\frac{\partial f_\alpha}{\partial p_i},p_i,f_\alpha,u,x^\beta\right)=0$$
$$(i,j=1,\dots,r;\ \alpha=1,\dots,n-r;\ \beta=1,\dots,n). \qquad (6)$$

Далее необходимо на (6) подействовать касательным преобразованием (3). При этом формулы вычисления $u_{11},\dots,u_{rr}$ будут совпадать с известными формулами τ -мерного преобразования Лежандра. Наконец, в преобразованное уравнение необходимо подставить (4) и т.д.

Изложенное упрощение алгоритма позволяет произвести классификацию уравнений (I), допускающих бегущие волны (для данных n и τ). Для простоты ограничимся рассмотрением случая, когда функция F в (I) не зависит от u и x_i .

К первому классу отнесем такие уравнения (I), когда функции $\psi, p_{\tau+1},\dots,p_n$ являются произвольными $\left[\frac{\partial(x_1,\dots,x_2)}{\partial(p_1,\dots,p_\tau)}\neq 0\right]$, ко второму классу - такие, когда функция ψ может быть произвольной, а функции $p_{\tau+1},\dots,p_n$ связаны одним уравнением в частных производных I-го порядка. Наконец, к третьему классу будем относить такие уравнения (I), когда $\psi, p_{\tau+1},\dots,p_n$ связаны определенной квазилинейной системой уравнений.

Справедлива следующая

<u>Теорема 2</u>. Уравнение (I) (для данных n и τ) принадлежит к первому классу, если (6) удовлетворяется тождественно; ко второму классу, если (6) приводится к виду

$$F_1=[\det\|u_{ij}\|]^m H\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial p_i};\ p_i;\ f_\alpha\right)=0$$

$(i,j=1,\dots,\tau;\ \alpha=1,2,\dots,n-\tau,$ $\qquad m$ - целое число) ;

к третьему классу, если после действия касательного преобразования (3) на (6) последнее приводится к виду

$$\sum_{i,j=1}^{2} B_{ij}\frac{\partial^2\Phi}{\partial p_i\partial p_j}+E=0,$$

где коэффициенты зависят от $p_1,\dots,p_\tau;\ f_1,f_2,\dots,f_{n-\tau},\ \frac{\partial f_1}{\partial p_1},\dots,\frac{\partial f_{n-\tau}}{\partial p_\tau}$.

Доказательства этой теоремы здесь также приводить не будем.

<u>Замечание</u>. Пусть даны два уравнения:

$$S_1=S_1(u_{ij},p_i)=0$$

$$S_2=S_1(u_{ij},p_i)+\sum_{i=1}^{s}A_i(p_i,u,x_i)\Delta_i=0,$$

где Δ_i - всевозможные миноры $\det\|u_{ij}\|$ порядков больших, чем τ $(i,j=1,2,\dots,n)$. Пусть необходимо выделить бегущие волны ранга r этих уравнений. Очевидно, что по определению все $\Delta_i = 0$ и системы бегущих волн этих уравнений будут совпадать. Такие уравнения будем называть эквивалентными.

3. Для заданных n и r с точностью до эквивалентности можно определить вид функции F в (I), т.е. выделить уравнения, принадлежащие к первому, второму и третьему классам. К первому классу относятся такие уравнения (I), для которых F является многочленом по минорам $\det\|u_{ij}\|$ порядков больших, чем r, в частности, - уравнение развертывающихся поверхностей в n -мерном пространстве [4]

$$\det\|u_{ij}\| = 0; \quad (i,j = 1,2,\dots,n). \tag{7}$$

Например, при $n=3$, $r=2$ все решения (7) определяются формулами

$$x^1 = \psi_1(p_1,p_2) - \lambda_1(p_1,p_2)x^3$$

$$x^2 = \psi_1(p_1,p_2) - \lambda_2(p_1,p_2)x^3$$

$$u = -\psi + \sum_{i=1}^{r} p_i x_i + [\lambda - \sum_{i=1}^{2} p_i \lambda_i] x^3$$

$$\lambda = p_3(p_1,p_2), \quad \lambda_i = \frac{\partial\lambda}{\partial p_i}, \quad \psi_i = \frac{\partial\psi}{\partial p_i}, \quad (i=1,2)$$

ψ, λ - две произвольные функции $\left(\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(p_1, p_2)} \neq 0\right)$.

Можно показать, что ко второму классу принадлежат такие уравнения (I), для которых F является однородным многочленом относительно миноров $\det\|u_{ij}\|$ ранга r с коэффициентами, зависящими от $p_1, p_2, \dots, p_n$. В качестве примера уравнения, принадлежащего ко второму классу, приведем следующее:

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(p_1,p_2,\dots,p_r)u_{ij} = 0. \tag{8}$$

Бегущие волны ранга $r=1$ определяются системой

$$x^1 = \psi^1 - p_2^1(p_1)x^2 - ,\dots, - p_n^1(p_1)x^n$$

$$u = -\psi + p_1\psi^1 + (p_2 - p_1 p_2^1)x^2 + ,\dots, + (p_n - p_1 p_n^1)x^n$$

$$A_{11}+2A_{12}p_2'+2A_{13}p_3'+,\dots,+A_{nn}(p_n')^2=0 \qquad (9)$$
$$p_k'=\frac{dp_k}{dp_1}, \quad \psi'=\frac{d\psi}{dp_1}$$

Здесь $\psi(p_1)$ - произвольная функция, а $p_2, p_3, \dots, p_n$ связаны одним уравнением Монжа. Если квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\xi_i\xi_j$ не является положительно определенной, то частные решения (8) зависят от $n-1$ произвольных функций одного переменного.

Аналогично предыдущим случаям можно указать вид уравнений (I), принадлежащих к третьему классу, например, уравнение (8) при $\tau=2$.

4. Приведем известные примеры частных решений дифференциальных уравнений с частными производными, которые являются бегущими волнами:

I) функционально-инвариантные решения волнового уравнения;

2) простые и кратные волны уравнений газовой динамики в случае потенциального изэнтропического движения газа;

3) уравнение (7);

4) решения уравнения вида

$$F(u_{11}, u_{12}, u_{22}; p_1, p_2, u)=0$$

при условии $p_1=p_1(u)$, $p_2=p_2(u)$, исследованные Л.М.Галонен [5] , и другие примеры.

5. В заключение рассмотрим бегущие волны ранга $\tau=1$ волнового уравнения

$$u_{tt}=u_{11}+u_{22}+u_{33}$$

в виде

$$p_1=p_1(\lambda),\ p_2=p_2(\lambda),\ p_3=p_3(\lambda),\ \left(\lambda=\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

Последнее уравнение (9) для этого случая примет вид

$$(p_1')^2+(p_2')^2+(p_3')^2=1$$

общее решение которого известно [6] :

$$p_1=\int\sin\theta(\lambda)\cos\varphi(\lambda)\,d\lambda,\ p_2=\int\sin\theta(\lambda)\sin\varphi(\lambda)\,d\lambda, \qquad (\text{IO})$$

$$p_3=\int\cos\theta(\lambda)\,d\lambda.$$

Первые две формулы (9) приводятся к форме

$$t + p_1'(\lambda) x_1 + p_2'(\lambda) x_2 + p_3'(\lambda) x_3 = 0$$

$$u = -\psi + \lambda\psi' + \sum_{i=1}^{3} (p_i - \lambda p_i') x_i \,, \qquad (13)$$

где $\psi(\lambda)$, $\theta(\lambda)$, $\varphi(\lambda)$ - три произвольные функции $\left(\frac{dt}{d\lambda} \neq 0\right)$.

Таким образом, формулы (10),(11) дают интеграл волнового уравнения в пространстве в классе бегущих волн ранга $\tau = 1$.

Литература

1. Меньших О.Ф. ИВУЗ, "Математика", №4, 1972.
2. Яненко Н.Н. Труды 4-го Всесоюзного матем.съезда, т.2, Л., 1964.
3. Погодин Н.Я.,Сучков В.А.,Яненко Н.Н. ДАН СССР, т.119, №3, 1958.
4. Яблоков В.А. "О некоторых классах дифференциальных уравнений в частных производных 2-го порядка". Научные труды Казанского института инженеров-строителей нефтяной промышленности, вып.2, 1954.
5. Галонен Л.М. ДАН СССР, т.55 №4, 1947.
6. Яненко Н.Н. ДАН СССР, т.109, №3, 1956.