

Х.С.Хазанов, В.Я.Логунов

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ  
ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В [1] рассмотрена консольная цилиндрическая оболочка, жестко заземленная по одному из торцов и нагруженная через упругий шпангоут системой сосредоточенных сил (рис. 1). Шпангоут рассматривается как кольцо постоянного поперечного сечения. Задача сопряжения оболочки с кольцом решается при этом аналитически.

С точки зрения передачи локальных нагрузок при минимальном весе конструкции рационально использовать шпангоут переменного сечения. В этом случае более целесообразными могут оказаться численные методы расчета и, в частности, метод конечных элементов. Матрица жесткости элемента пространственного кольца получена в замкнутом виде в [2]. Оболочку можно также представить в виде совокупности конечных элементов. Матрицы жесткости элементов цилиндрической оболочки различной формы с использованием разных аппроксимирующих функций для перемещений приведены, например, в [3, 4, 5]. Однако при такой постановке достаточная точность результатов будет обеспечена при весьма высоком порядке разрешающей системы уравнений, что вызовет определенные трудности с реализацией задачи на ЭВМ.

В подобных задачах заманчивой является мысль о представлении всей оболочки в виде одного конечного элемента, имеющего узлы по линии сочленения со шпангоутом. Желательно при этом для построения матрицы жесткости использовать точное решение дифференциального уравнения изгиба оболочки.

Следует отметить, что идея использования точного решения для

построения матрицы жесткости достаточно крупного элемента не является новой. Такой подход использован, например, в [6] для пластины с отверстием. Но здесь точное решение используется лишь для выявления поля перемещений (вместо введения аппроксимирующих функций), после чего применяется стандартная процедура построения матрицы жесткости, связанная с интегрированием произведения функциональных матриц.

В настоящей статье показано, что применительно к рассматриваемому классу задач построение матрицы жесткости по известному точному решению дифференциального уравнения изгиба оболочки сводится к элементарным операциям над числовыми матрицами. То есть, при этом отпадает надобность в выполнении громоздкой операции интегрирования.

Итак, пусть нам известно для оболочки точное решение в тригонометрических рядах относительно окружной координаты. В этом случае силы взаимодействия между оболочкой и шпангоутом получатся также в виде тригонометрических рядов. На рис. 2 через  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  обозначены погонные растягивающая, касательная и обобщенная перерезывающая силы, через  $P_4$  - погонный изгибающий момент в торцовом сечении оболочки. Обозначим через  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  линейные смещения точек срединной поверхности в том же сечении оболочки по осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , а через  $u_4$  - угол поворота нормали к срединной поверхности в направлении  $P_4$ .

Будем для простоты полагать, что внешняя нагрузка и шпангоут симметричны относительно диаметральной плоскости оболочки, от которой ведется отсчет углов  $\varphi$ . В этом случае ряды для указанных сил и перемещений будут иметь вид <sup>\*</sup>)

$$P_i = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_{i\nu} \cos \nu \varphi \quad (i=1,3,4), \quad P_2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} P_{2\nu} \sin \nu \varphi \quad (1)$$

$$u_i = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_{i\nu} \cos \nu \varphi \quad (i=1,3,4), \quad u_2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} u_{2\nu} \sin \nu \varphi, \quad (2)$$

где  $P_{\nu} = \frac{1}{2}$  при  $\nu=0$ ,  $P_{\nu} = 1$  при  $\nu \neq 0$ .

Перейдем в (1) и (2) от рядов к конечным суммам, ограничив в них суммирование до  $\nu_{max} = t$ . Введем теперь матрицы-столбцы <sup>\*\*)</sup>

<sup>\*</sup>) Множители  $P_{\nu}$  включены только в ряды типа (1) для удобства последующих рассуждений.

<sup>\*\*)</sup> Для удобства записи будем элементы столбцов располагать в строку и заключать их в фигурные скобки.

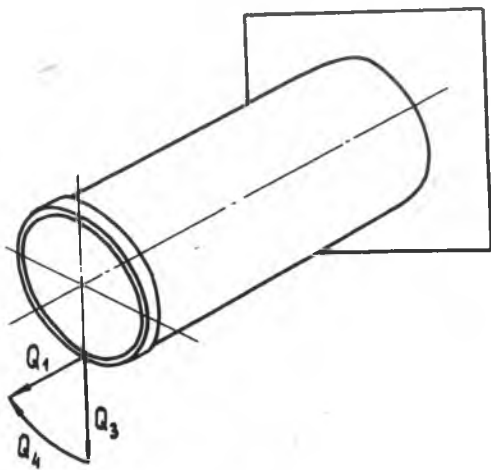


Рис. 1

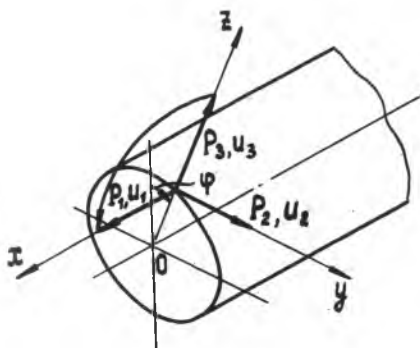


Рис. 2

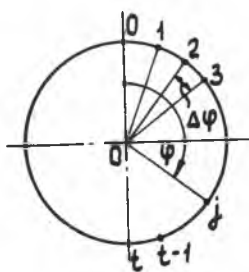


Рис. 3

$$P = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}, \quad u = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}. \quad (3)$$

Здесь

$$P_i = \{P_{i0}, P_{i1}, P_{i2}, \dots, P_{it}\} \quad (i=1,3,4), \quad P_2 = \{P_{21}, P_{22}, \dots, P_{2t}\}$$

$$u_i = \{u_{i0}, u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{it}\} \quad (i=1,3,4), \quad u_2 = \{u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2t}\} - \quad (4)$$

- подматрицы-столбцы, составленные из коэффициентов рядов (1) и (2).

Между коэффициентами рядов (1) с одной стороны и коэффициентами рядов (2) с другой имеется однозначное соответствие, которое в самом общем виде запишется как

$$P = cu. \quad (5)$$

С учетом обозначений (3) имеем

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Здесь  $c_{ij}$  - в общем случае прямоугольные подматрицы, содержащие  $t$  или  $t+1$  строк и столбцов. Например,

$$c_{32} = \begin{bmatrix} c_{30,21} & c_{30,22} & \dots & c_{30,2n} & \dots & c_{30,2t} \\ c_{31,21} & c_{31,22} & \dots & c_{31,2n} & \dots & c_{31,2t} \\ c_{32,21} & c_{32,22} & \dots & c_{32,2n} & \dots & c_{32,2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{3m,21} & c_{3m,22} & \dots & c_{3m,2n} & \dots & c_{3m,2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{3t,21} & c_{3t,22} & \dots & c_{3t,2n} & \dots & c_{3t,2t} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Типовой элемент этой матрицы  $c_{3m,2n}$  представляет собой

амплитудное значение  $m$ -ой гармоники силы  $P_3$  (коэффициент  $P_{3m}$ ), вычисленное в предположении, что  $u_{2n} = 1$ , а все остальные коэффициенты рядов (2) равны нулю.

Отсюда вытекает и методика построения матрицы  $C$ . Берется решение уравнения цилиндрической оболочки в тригонометрических рядах относительно окружной координаты [7]. Для отыскания содержащихся в нем постоянных интегрирования используются граничные условия в перемещениях. У заделки все перемещения равны нулю. На свободном торце поочередно один из коэффициентов рядов (2) полагается равным единице, а остальные - нулю. Таким образом, получаются  $4t + 3$  комплексов произвольных постоянных.

Обратим внимание на то, что система линейных алгебраических уравнений относительно постоянных, вытекающая из граничных условий задачи, распадается на  $t + 1$  независимых систем, каждая из которых соответствует определенной гармонике в решении дифференциального уравнения оболочки. При этом неоднородной будет только одна система, а остальные оказываются однородными, и соответствующие постоянные равны нулю.

Далее по известным формулам теории цилиндрической оболочки и найденным значениям постоянных подсчитываются ряды вида (I) для внутренних усилий в торцовом сечении оболочки. Коэффициенты этих рядов и будут представлять собой искомые элементы матрицы  $C$ , причем многие из них будут нулевыми в силу равенства нулю ряда постоянных интегрирования. Так, например, подматрица (7) будет иметь вид

$$C_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_{31,21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{32,22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & C_{33,23} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{3t,2t} \end{bmatrix}$$

Предположим теперь, что связь между оболочкой и шпангоутом

осуществляется в отдельных точках (узлах), нумерация которых приведена на рис. 3 (на полуокружности -  $t+1$  узлов). Обозначим через  $v_{1j}$ ,  $v_{2j}$ ,  $v_{3j}$  линейные смещения узла  $j$  оболочки в направлении осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , а через  $v_{4j}$  - угол поворота нормали к срединной поверхности оболочки относительно оси  $y$ .

Составим матрицу-столбец узловых перемещений

$$v = \{ v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \}, \quad (8)$$

где

$$v_i = \{ v_{i0} \ v_{i1} \ v_{i2} \ \dots \ v_{ij} \ \dots \ v_{it} \} \quad (i=1, 2, 3, 4).$$

Узловые перемещения могут быть выражены через перемещения  $u$ . Для  $i=1, 3, 4$  имеем

$$v_i = \alpha_i u_i. \quad (9)$$

Через  $\alpha_i$  здесь обозначена квадратная матрица вида

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \cos \varphi_1 & \cos 2\varphi_1 & \dots & \cos t\varphi_1 \\ 1 & \cos \varphi_2 & \cos 2\varphi_2 & \dots & \cos t\varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos \varphi_{t-1} & \cos 2\varphi_{t-1} & \dots & \cos t\varphi_{t-1} \\ 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^t \end{bmatrix} \quad (10)$$

При постоянстве интервала между узлами  $\Delta\varphi$  матрица  $\alpha_i$  будет симметричной.

Связь между матрицами  $v_2$  и  $u_2$  требует более детального анализа. Зависимость

$$v_2 = \alpha_2 u_2 \quad (11)$$

в развернутом виде запишется так:

$$\begin{bmatrix} v_{20} \\ v_{21} \\ v_{22} \\ \dots \\ v_{2,t-1} \\ v_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \sin 2\varphi_1 & \dots & \sin t\varphi_1 \\ \sin \varphi_2 & \sin 2\varphi_2 & \dots & \sin t\varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin \varphi_{t-1} & \sin 2\varphi_{t-1} & \dots & \sin t\varphi_{t-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ \dots \\ u_{2,t-1} \\ u_{2t} \end{bmatrix} \quad (I2)$$

Из условия симметрии узловые перемещения  $v_{20}$  и  $v_{2t}$  должны быть равны нулю. Это получается и формально из (I2), так как соответствующие строки матрицы  $\alpha_2$  - нулевые. Для удобства дальнейших рассуждений опустим нулевые элементы в матрице  $v_2$ , т.е. примем

$$v_2 = \{v_{21} \ v_{22} \ \dots \ v_{2,t-1}\}. \quad (I3)$$

Приведем теперь в соответствие количество элементов в матрицах  $v_2$  и  $u_2$ , опустив в последней элемент  $u_{2t}$  <sup>\*</sup>, так что

$$u_2 = \{u_{21} \ u_{22} \ \dots \ u_{2,t-1}\}. \quad (I4)$$

Это тем более оправдано, если шаг между узлами  $\Delta\varphi = \text{const}$ , так как при этом последний столбец матрицы  $\alpha_2$  в (I2) будет содержать только нулевые элементы. Следовательно, перемещения  $v_2$  не будут зависеть от  $u_{2t}$ .

Матрица  $\alpha_2$  будет теперь квадратной и примет вид

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} \sin \varphi_1 & \sin 2\varphi_1 & \dots & \sin (t-1)\varphi_1 \\ \sin \varphi_2 & \sin 2\varphi_2 & \dots & \sin (t-1)\varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin \varphi_{t-1} & \sin 2\varphi_{t-1} & \dots & \sin (t-1)\varphi_{t-1} \end{bmatrix} \quad (I5)$$

<sup>\*</sup>) Соответственным образом должны быть сокращены матрицы  $u_2$  и  $P_2$  в (4), т.е. суммирование в рядах (1) для  $P_2$  и в (2) для  $u_2$  должно вестись до  $v_{\max} = t-1$ .

В итоге можно записать

$$\mathbf{v} = \alpha \mathbf{u}, \quad (16)$$

где  $\alpha$  - квазидиагональная матрица вида

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Из (16) получим

$$\mathbf{u} = \alpha^{-1} \mathbf{v} = \beta \mathbf{v}. \quad (18)$$

Обращение матрицы  $\alpha$  сводится, учитывая (17), к обращению матриц  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

Обозначим через  $\mathbf{S}$  матрицу узловых сил оболочки, действующих в направлении перемещений  $\mathbf{v}$  и эквивалентных в энергетическом смысле распределенным силам  $\mathbf{P}$ . Имеем

$$\mathbf{S} = \{ \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3, \mathbf{S}_4 \}, \quad (19)$$

где

$$\mathbf{S}_i = \{ S_{i0}, S_{i1}, S_{i2}, \dots, S_{it} \} \quad (i=1, 3, 4), \quad \mathbf{S}_2 = \{ S_{21}, S_{22}, S_{23}, \dots, S_{2,t-1} \}.$$

Через  $S_{ij}$  обозначена сила, приложенная в узле  $j$  и направленная по перемещению  $v_{ij}$ .

Запишем связь между узловыми силами и узловыми перемещениями в стандартной форме

$$\mathbf{S} = \mathbf{K} \mathbf{v}, \quad (20)$$

где  $\mathbf{K}$  - матрица жесткости оболочки.

Пусть  $\delta \mathbf{u}$  - возможные перемещения оболочки, которые могут быть представлены рядами вида (2) с заменой коэффициентов  $u_{ij}$  на  $\delta u_{ij}$ . Матрицу-столбец из коэффициентов  $\delta u_{ij}$  обозначим через  $\delta \mathbf{u}$ . Структура ее подобна матрице  $\mathbf{u}$  (3). Тогда приращение узловых перемещений будет равно  $\delta \mathbf{v} = \alpha \delta \mathbf{u}$ , откуда

$$\delta \mathbf{u} = \beta \delta \mathbf{v} \quad (21)$$



Узловые силы  $S$  будут эквивалентны действительным внешним нагрузкам, если их работа на перемещениях  $\delta v$  будет равна работе распределенных сил (I) на возможных перемещениях  $\delta u$ , т.е.

$$\delta v^T S = \int_0^{\pi} \left[ \sum_{\nu=0}^{t-1} \sum_{\mu=0}^{t-1} P_{\nu} (P_{1\nu} \delta u_{1\mu} + P_{2\nu} \delta u_{2\mu} + P_{3\nu} \delta u_{3\mu} + P_{4\nu} \delta u_{4\mu}) \cos \nu \varphi \cos \mu \varphi + \right. \\ \left. + \sum_{\nu=1}^{t-1} \sum_{\mu=1}^{t-1} P_{2\nu} \delta u_{2\mu} \sin \nu \varphi \sin \mu \varphi \right] R d\varphi.$$

После интегрирования и перехода в правой части к матричным обозначениям имеем

$$\delta v^T S = \frac{\pi R}{2} \delta u^T P.$$

Если воспользоваться равенствами (5), (18), (20), (21), то получим

$$\delta v^T K v = \frac{\pi R}{2} \delta v^T \beta^T C \beta v.$$

Имея в виду независимость элементов матриц  $v$  и  $\delta v$ , можно окончательно записать

$$K = \frac{\pi R}{2} \beta^T C \beta. \quad (22)$$

Таким образом, построена матрица жесткости для цилиндрической оболочки, рассматриваемой как один конечный элемент. Если для оболочки при заданных краевых условиях известно точное решение в тригонометрических рядах, то получение матрицы жесткости сводится к выполнению простейших операций над числовыми матрицами.

После нахождения матрицы жесткости оболочки по (22) для построения матрицы жесткости системы оболочка-шпангоут (последний представляется при этом набором конечных элементов) используется стандартная процедура.

В настоящей статье обсуждается методика построения матрицы жесткости конструктивного элемента с использованием точного решения задачи на примере консольной цилиндрической оболочки. Однако возможности подобного подхода выходят далеко за рамки рассмотренного примера.

Л и т е р а т у р а

1. Тарасов Ю.Л., Логунов В.Я., Широкова В.И. Расчет цилиндрической оболочки, симметрично нагруженной сосредоточенными силами и моментом через упругий шпангоут. "Вопросы прочности элементов авиационных конструкций". Межвузовский сборник, вып. I, 1974.
2. Логунов В.Я. Матрица жесткости элемента кривого бруса. "Вопросы прочности элементов авиационных конструкций". Межвузовский сборник, вып. 2, 1975.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. Перевод с английского, изд-во "Мир", М., 1975.
4. Joms R.E., Strome D.R. *Direct Stiffness Method of Shells of Revolution Utilizing Curved Elements*. AIAA Journal, v. 4, N9, 1966.
5. Bagnex F.K., Fox R.L., Schmit L.A. *A Cylindrical Shell Discrete Element*. AIAA Journal, v. 5, N4, 1967.
6. Rao A.K., Raju I.S., Murty A.V. Krishna. *A powerful hybrid method in finite element analysis*. „Int. J. Numer. Met. Eng", v. 3, N3, 1971.
7. Гольденвейзер А.А. Теория упругих тонких оболочек, ГИТТЛ М., 1953.