

В. М. ГОЛОВИН, М. Я. СЫЧЕВ.

ВЛИЯНИЕ ТЕПЛООБМЕНА С ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДОЙ НА ДИССИПАТИВНЫЙ НАГРЕВ ЖИДКОСТИ ПРИ ЛАМИНАРНОМ ДВИЖЕНИИ В КРУГЛОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

В работе приводится решение задачи о нагреве жидкости постоянной вязкости за счет работы сил внутреннего трения при ламинарном движении на гидродинамически стабилизированном участке в круглой цилиндрической трубке при различных значениях внешнего коэффициента теплоотдачи, толщины и теплопроводности стенок.

Обозначения

- T — температура жидкости;
 T_0 — температура жидкости на входе в трубу, равная температуре окружающей среды;
 V — скорость течения;
 W — средняя по объемному расходу Q скорость;
 ρ, c, λ, μ — соответственно плотность, теплоемкость, теплопроводность и динамическая вязкость жидкости;
 Re — число Рейнольдса;
 Pe — число Пекле;
 λ_{ω} и δ — теплопроводность и толщина стенок трубы;
 α — внешний коэффициент теплоотдачи от наружной поверхности стенок трубы в окружающую среду;
 k — коэффициент теплообмена между жидкостью и окружающей средой,

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha} + \frac{\delta}{\lambda_{\omega}};$$

$Nu_k = \frac{kd}{\lambda}$ — граничное число Нуссельта;

$D = \frac{W^2}{\lambda}$ — диссипативный фактор;

$R = \frac{d}{2}$ — радиус трубы.

В цилиндрической системе координат (r, z) с осью z , направленной по оси трубы в сторону течения, задача формулируется следующей системой уравнений, начальных и краевых условий:

$$V = 2\omega \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right). \quad (1)$$

$$\rho c V \frac{\partial T}{\partial z} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \mu \left(\frac{dV}{dr} \right)^2. \quad (2)$$

$$T \Big|_{z=0} = T_0; \quad k(T - T_0) \Big|_{r=R} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} \quad \text{при } z > 0; \quad \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (3)$$

Введением новой функции

$$\vartheta = T - T_0,$$

и новых независимых переменных

$$\xi = \frac{r^2}{R^2} \quad \text{и} \quad \zeta = \frac{1}{Pe} \frac{z}{R}$$

при больших числах Пекле система (1) — (3) преобразуется к виду:

$$g \frac{\partial \vartheta}{\partial \zeta} = 4 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \right) + 16 D \xi. \quad (4)$$

$$\vartheta \Big|_{\xi=0} = 0; \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} = -\frac{Nu_k}{4} \vartheta \Big|_{\xi=1} \quad \text{при } \zeta > 0; \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = 0; \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad (5)$$

где $g = 1 - \xi$ — весовая функция.

Нетрудно видеть, что при использовании метода Фурье задача сводится к отношению собственных чисел β_n , вырожденного гипергеометрического уравнения

$$x y'' + (1-x) y' - x_n y = 0, \quad (6)$$

в котором

$$x = \beta_n \xi; \quad x_n = \frac{2 - 3_n}{4}$$

и решением которого, конечным на оси трубы при $\xi = 0$ являются функции Похгаммера:

$$F_n(x_n; 1; \beta_n \xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x_n)_m}{(m!)^2} (\beta_n \xi)^m. \quad (7)$$

$$(x_n)_0 = 1; \quad (x_n)_n = x_n(x_n + 1) \cdots (x_n + m - 1).$$

Собственные числа β_n находятся из краевого условия на стенке трубы при $\xi = 1$, сводящегося к трансцендентному уравнению:

$$\beta_n \left[\frac{1}{2} - x_n \frac{F_n(x_n + 1; 2; \beta_n)}{F_n(x_n; 1; \beta_n)} \right] = \frac{Nu_k}{4}. \quad (8)$$

Решение уравнения (4), удовлетворяющее совокупности условий (5) получается тогда в форме:

$$\vartheta = D \left\{ \left[(1 - \xi^2) + \frac{8}{Nu_k} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \exp(-\beta_n \xi) P_n(\xi) \right] \right\}, \quad (9)$$

где

$$P_n(\xi) = \exp\left(-\frac{1}{2} \beta_n^2 \xi\right) F_n\left(\beta_n; 1; \beta_n^2 \xi\right);$$

$$C_n = B_n \left(1 + \frac{8}{Nu_k} A_n\right).$$

Коэффициенты A_n и B_n определяются из условия на входе в трубу с использованием свойства ортогональности системы функций $P_n(\xi)$ по формулам:

$$A_n = \frac{\int_0^1 g P_n(\xi) d\xi}{\int_0^1 g P_n^2(\xi) d\xi} = \frac{A_n'}{N_n'^2};$$

$$B_n = \frac{\int_0^1 g \xi^2 P_n(\xi) d\xi}{\int_0^1 g P_n^2(\xi) d\xi} = \frac{B_n'}{N_n'^2}.$$

Температура стенки (внутренней поверхности) находится из (9) при $\xi = 1$

$$\vartheta_w = D \left[\frac{8}{Nu_k} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \exp(-\beta_n^2 \xi) P_n(1) \right] \quad (10)$$

Величина среднего по объемному расходу Q температурного напора в каждом из сечений трубы находится по формуле:

$$\vartheta_z = \frac{1}{Q} \int_{\sigma} v \vartheta d\sigma,$$

где

σ — площадь поперечного сечения трубы.

Соответствующие элементарные выкладки позволяют получить для ϑ_z выражение:

$$\vartheta_z = D \left[\frac{5}{6} + \frac{8}{Nu_k} + 2\lambda \mu_k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\beta_n^2} \exp(-\beta_n^2 \xi) P_n(1) \right]; \quad (11)$$

или

$$\vartheta_z = D \left[\frac{5}{6} + \frac{8}{Nu_k} + \sum_{n=0}^{\infty} G_n \exp(-\beta_n^2 \xi) \right], \quad (12)$$

где

$$G_n = 2 \frac{Nu_k}{\beta_n^2} c_n P_n(1)$$

$$\beta_n = \frac{1}{Pe} \frac{z}{d}.$$

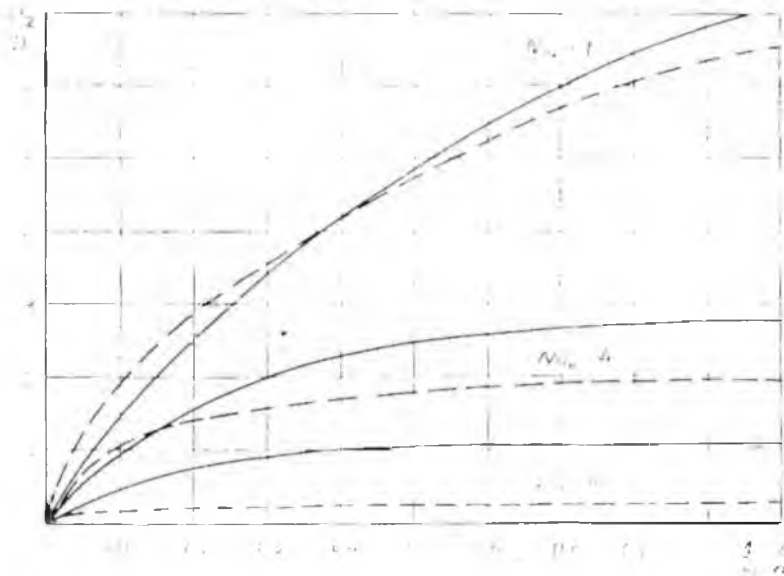
Из (10) и (11) получаем при $\xi \rightarrow \infty$

$$\psi_{\omega}(\infty) = 8 \frac{D}{Nu_k}; \quad (13)$$

$$\psi_z(\infty) = D \left[\frac{5}{6} + \frac{8}{Nu_k} \right]. \quad (14)$$

Значения β_n , $2\beta_n^2 A_n'$, B_n' , A_n , B_n , C_n , $P_n(1)$, рассчитанные на ЭВМ „Урал - 1“ для $Nu_k = \infty$; 40; 4; 1 и $n = 0$; 1; 2; приведены в таблице 1.

На фиг. 1 представлены кривые изменения температурного напора и температуры внутренней поверхности стенок (пунктир) по длине трубы.



Фиг. 1.

Полученные результаты позволяют выяснить ряд интересных качественных особенностей влияния внешнего теплообмена на диссипативный нагрев жидкости в круглой цилиндрической трубе.

Анализ (9) показывает, что нагрев жидкости за счет работы сил внутреннего трения приводит к образованию в каждом из сечений трубы характерного температурного профиля с двумя горбами-максимумами и провалом посредине.

По мере прогрева жидкости по длине трубы указанные максимумы возрастают по абсолютной величине, провалы между ними выравниваются и в пределе при $\xi \rightarrow \infty$ температурный профиль вырождается в параболу четвертой степени относительно ξ .

Сопоставляя (9) и (10), можно заметить также, что при любом конечном Nu_k на некотором вполне определенном расстоянии от

входа в трубу рост температуры стенок и пристенного слоя опережает рост температуры центральных слоев жидкости. По мере ухудшения условий теплоотдачи во внешнюю среду, совокупно характеризуемого падением граничного числа Nu_k , этот процесс захватывает все большую область течения. Таким образом, наступление тепловой стабилизации потока оттягивается на все большие расстояния от входа.

Отмеченные особенности диссипативного температурного поля при $\mu = \text{const}$, по-видимому, должны в какой-то мере сохраняться и при переменной, уменьшающейся с температурой вязкости. Более того, как это, например, показано в [1], на участке гидродинамической и тепловой стабилизации в случае переменной вязкости предельный диссипативный эффект при прочих равных условиях даже возрастает. Поэтому можно предполагать, что учет рассеяния механической энергии и внешнего теплообмена в развитии теории начального участка и гидродинамической устойчивости, позволит не только преодолеть существующие в этом отношении теоретические трудности, но и получить решения, перспективные с практической точки зрения.

Представляет интерес также количественная оценка приведенных здесь результатов. Из (14) видно, что величина предельного температурного напора существенно зависит, как от Nu_k , так и от D , может изменяться в широких пределах.

Так при прокачивании нефти в трубе диаметром $d = 0,4$ м при $T_0 = 10^\circ\text{C}$ со скоростью $W = 1$ м/сек, соответствующей числу Рейнольдса на входе $Re = 280$ значение диссипативного фактора, подсчитанного по вязкости при начальной температуре T_0 , получится равным $D_0 \approx 4,56$. Предельный температурный напор при $N_k = 40$ тогда составляет

$$\left. \vartheta_z(\infty) \right\}_{\substack{D_0=4,56 \\ Nu_k=40}} = 4,73^\circ\text{C}.$$

При течении же со скоростью $W = 2$ м/сек, $D_0 \approx 18,2$, что приводит при $Nu_k = 4$ к предельному температурному напору

$$\left. \vartheta_z(\infty) \right\}_{\substack{D_0=18,2 \\ Nu_k=4}} = 51,6^\circ\text{C}.$$

Приведенные примеры указывают, что к выбору значения $\mu = \text{const}$ при расчете диссипативного фактора D в случае больших расходов и малых Nu_k следует подходить с известной осторожностью. Во избежание преувеличения диссипативного эффекта, во всяком случае, предпочтительнее выбирать μ при температуре, соответствующей предельному температурному напору, который может быть определен тем или иным методом последовательных приближений.

Так, в рассмотренном выше случае при $D_0 = 18,2$ и $Nu_k = 4$ совершенно очевидно дальнейшее уточнение расчета. С этой целью в качестве расчетной достаточно принять среднюю арифметическую температуру в полученном температурном интервале первого приближения. Указанная температура равна $T_1 = 30,8^\circ\text{C}$. Соответствующее значение диссипативного фактора $D_1 = 8,1$.

$$\text{Из (14) находим } \vartheta_2(\infty) \Big|_{\substack{D_1=8,1 \\ Nu_k=4}} = 22,9 \text{ C.}$$

Так что $T_2 = 32,9 \text{ C}$.

Полученная величина и является в данном случае окончательной. Последний из приведенных численных примеров показывает, что диссипативный нагрев жидкости может достигать значительных величин.

Поскольку вязкость жидкости в большинстве случаев весьма сильно зависит от температуры, то недооценка диссипативного эффекта, в особенности, в условиях плохого теплообмена жидкости с окружающей средой может приводить к существенным ошибкам в определении коэффициента сопротивления и пропускной способности трубопроводов.

ВЫВОДЫ

1. Получено аналитическое решение задачи о диссипативном нагреве жидкости при ламинарном движении в круглой цилиндрической трубе в наличии теплообмена с окружающей средой.

2. Выяснены некоторые важные качественные особенности влияния внешнего теплообмена на процесс формирования диссипативного температурного поля.

3. Показано, что по мере ухудшения условий теплообмена жидкости с окружающей средой диссипативный нагрев ее возрастает. Поэтому недооценка этого фактора может приводить к серьезным просчетам при проектировании и эксплуатации длинных трубопроводов, работающих на жидкостях с большой вязкостью.
