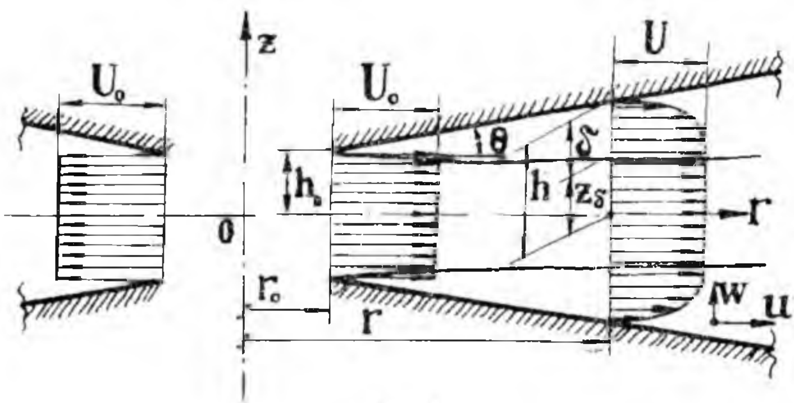
КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
ТРУДЫ. ВЫПУСК XXIV. 1966 г.
Вопросы механики жидкостей и газов

А. К. ЧИНУРИН

ТУРБУЛЕТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ВХОДНОМ УЧАСТКЕ РАДИАЛЬНОГО ДИФФУЗОРА

Радиальный диффузор представляет собой канал, образованный в общем случае двумя соосными поверхностями вращения (фиг. 1). Диффузоры этого типа являются элементами компрессорных машин, вихревых холодильников, аппаратов на воздушной подушке (АВП).

Течение в таких каналах характеризуется значительным продольным градиентом давлений, сильно влияющим на профиль ско-



Фиг. 1.

ростей и, следовательно, на сопротивление канала. В большинстве случаев при исследовании пограничного слоя в условиях внутренней задачи используют наперед заданный профиль скоростей — степенной или логарифмический, которые, как известно, хорошо согласуются с экспериментом только для плоской пластинки.

В частности, степенной закон распределения скоростей был использован в [4] применительно к безлопаточному диффузору компрессора, что неточно отражает фактическую картину течения, так как при наличии продольного градиента давлений профили скоростей нельзя считать подобными в каждом последующем сечении. Кроме того, такой подход не дает возможности определить точку отрыва пограничного слоя, которую приходится находить искусственным путем, как это сделано в [4].

Целесообразнее не задавать профиль скоростей заранее, а находить его из условий конкретной задачи, используя дифференциальные уравнения движения и граничные условия, как в [1, 2, 3, 5].

Рассмотрим пограничный слой при радиальном течении вязкой несжимаемой жидкости в диффузоре, образованном двумя дисками или конусами с малым углом раствора Θ° (см. фиг. 1).

Сделаем следующие допущения: течение обладает центральной симметрией относительно оси z, а также симметрично относительно оси r в плоскости чертежа; профиль скоростей на входе при $r=r_0$ (фиг. 1) равномерен; пограничный слой турбулентен с самого начала; ядро течения подчиняется законам потенциального движения, и скорость по его сечению постоянна; статическое давление постоянно в каждом сечении потока и равно давлению в потенциальном ядре; все компоненты тензора напряжений пренебрежимо малы по сравнению с τ_{zr}.

$$\delta = h - z_\delta, \quad \bar{z} = \frac{h-z}{\delta}.$$

Уравнения Рейнольдса в нашем случае (в цилиндрической системе координат) имеют вид:

$$w\frac{\partial u}{\partial z} + u\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{dp}{dr} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial\tau}{\partial z} \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r} = 0 \tag{2}$$

где w и u — радиальная и осевая осредненные составляющие скорости в пограничном слое;

p — статическое давление;

ρ — массовая плотность;

τ — касательное напряжение.

Граничные условия задачи:

$$u = w = 0 \text{ на стенке при } z = h \tag{3}$$

$$u = U \text{ на внешней границе слоя при } z = z_\delta.$$

ПРОФИЛЬ СКОРОСТЕЙ И ЗАКОН СОПРОТИВЛЕНИЯ

Для получения профиля скоростей разложим касательное напряжение в ряд Тейлора вблизи стенки:

$$\tau = \tau_0 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right)_{z=h}(h - z) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2}\right)_{z=h}(h-z)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 \tau}{\partial z^3}\right)_{z=h}(h-z)^3 + \ldots, \tag{4}$$

где τ_0 — напряжение на стенке.

Коэффициенты ряда найдем последовательным дифференцированием уравнения (1) с помощью (2) и граничных условий (3). Ограничиваясь первыми тремя членами разложения, получим:

$$\tau = \tau_0 + \frac{dp}{dr}(h - z) = \tau_0(1 + \lambda \bar{z}), \tag{5}$$

где $\bar{z} = \frac{h-z}{\delta}$; $\lambda = \frac{dp}{dr}\cdot\frac{\lambda}{\tau_0}$ — формпараметр.

Применим гипотезу Прандтля о пути смешения:

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2, \tag{6}$$

$$l = k(h - z), \tag{7}$$

где $k = k(\lambda)$ — функция, зависящая от продольного градиента давлений; для плоской пластинки $k = 0{,}4 = \mathrm{const}$ (1).

Подставив (5) в (6) с учетом (7), получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{v_*}{k}\cdot\frac{\sqrt{1+\lambda\bar{z}}}{\bar{z}}, \quad \text{где } \bar{z} = \frac{h-z}{\delta}, \; v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}.$$

Интегрируя его по $\bar{z}$ с использованием граничных условий (3) для определения постоянной интегрирования, получим формулу для профиля скоростей в турбулентном пограничном слое:

$$\frac{u}{V} = \bar{u} = 1 + \frac{1}{x}\left[2\left(\sqrt{1+\lambda\bar{z}} - \sqrt{1+\lambda}\right) + \ln\frac{\left(\sqrt{1+\lambda\bar{z}}-1\right)\left(\sqrt{1+\lambda}+1\right)}{\left(\sqrt{1+\lambda\bar{z}}+1\right)\left(\sqrt{1+\lambda}-1\right)}\right], \tag{8}$$

где $x = \frac{k \cdot V}{v_*}$.

Для получения закона сопротивления необходимо приравнять скорости в турбулентном пограничном слое и в ламинарном подслое на внешней границе последнего, где профили скоростей должны сращиваться.

Найдем вначале скорость в ламинарном подслое, для чего используем известное соотношение Кармана для толщины этого подслоя:

$$\delta_\lambda = \varkappa \frac{\nu}{v_*}, \tag{9}$$

где $\varkappa = \varkappa\left(\frac{\lambda}{R_*}\right)$ — функция, которая должна быть определена опытным путем; для плоской пластинки

$$\varkappa = 11{,}5 = \mathrm{const}.$$

$$R_* = \frac{v_* \delta}{\nu}; \tag{10}$$

ν — кинематический коэффициент вязкости;
и закон вязкого трения для подслоя:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial z}. \tag{11}$$

Подставляя (10) в (5), получим:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = \frac{v_*^2 \delta}{\nu} \left(1 + \lambda \bar{z}\right).$$

Проинтегрировав это уравнение аналогично (8), получим профиль скоростей в ламинарном подслое:

$$\frac{u_л}{U} = \bar{u}_л = \alpha \frac{k}{\varkappa}\left(1 + \frac{\lambda}{2} \cdot \bar{z}_л\right) = \alpha \frac{k}{\varkappa}\left(1 + \frac{\alpha}{2} \frac{\lambda}{R_*}\right), \tag{12}$$

где $u_л$ — скорость в ламинарном подслое.

Из (9) и (10) следует:

$$\bar{z}_л = \frac{h - z_л}{\delta} = \frac{\delta_л}{\delta} = \frac{\alpha}{R_*}.$$

И, наконец, сравнивая (8) и (12), получим закон сопротивления

$$\varkappa = k \cdot \alpha + \frac{k \cdot \alpha^2}{2} \cdot \frac{\lambda}{R_*} + 2\left(\sqrt{1 + \lambda} - \sqrt{1 + \alpha \frac{\lambda}{R_*}}\right) + \\ + \ln \frac{\left(\sqrt{1 + \alpha \frac{\lambda}{R_*}} + 1\right)\left(\sqrt{1 + \lambda} - 1\right)}{\left(\sqrt{1 + \alpha \frac{\lambda}{R_*}} - 1\right)\left(\sqrt{1 + \lambda} + 1\right)} \tag{13}$$

Найдем профиль скоростей и закон сопротивления в точке отрыва пограничного слоя.

Здесь напряжение τ_0 обращается в 0, а λ — в бесконечность. Тогда выражение (5) будет иметь вид:

$$\tau = \frac{dp}{dr}(h - z), \quad \text{при } \tau_0 = 0 \text{ и } \lambda \to \infty. \tag{14}$$

Подставив (14) в (6) с учетом (7), получим дифференциальное уравнение, которое проинтегрируем из условий на внешней границе слоя $u = U$ при $z = z_\delta$. После элементарных преобразований получим профиль скоростей в точке отрыва:

$$\frac{u}{U} = \bar{u} = 1 - \frac{2}{k_{отр} \cdot U} \cdot \sqrt{\frac{\delta}{\rho} \cdot \frac{dp}{dr}} \cdot \left(1 - \sqrt{\bar{z}}\right). \tag{15}$$

Для получения закона сопротивления поступим так же, как в предыдущем случае. Приравнивая (11) и (14) для ламинарного подслоя и проинтегрировав полученное уравнение, будем иметь профиль скоростей в ламинарном подслое:

на стенке

$$\frac{u_л}{U} = \bar{u}_л = \frac{\delta^2}{\mu\cdot U}\cdot\frac{dp}{dz}\cdot\frac{\bar{z}_л^2}{2} \quad \text{при } u = 0. \tag{16}$$

Приравнивая (15) и (16) на внешней границе ламинарного подслоя, получим закон сопротивления в точке отрыва:

$$1 - \frac{\delta^2}{\mu U}\cdot\frac{dp}{dr}\cdot\frac{\bar{z}_л^2}{2} = \frac{2}{k_{отр}\cdot U}\cdot\sqrt{\frac{\delta}{\rho}\cdot\frac{dp}{dr}}\cdot\left(1 - \sqrt{\bar{z}_л}\right). \tag{17}$$

Полагая, что $\bar{z}_л$ в точке отрыва мало, и пренебрегая величинами

$$\frac{\delta^2}{\mu\cdot U}\cdot\frac{dp}{dr}\cdot\frac{\bar{z}_л^2}{2} \quad \text{и} \quad \sqrt{\bar{z}_л},$$

получим вместо (17):

$$\frac{2}{k_{отр}\cdot U}\sqrt{\frac{\delta}{\rho}\cdot\frac{dp}{dr}} = 1. \tag{18}$$

Выражение (18) является условием отрыва пограничного слоя. При этом $k = 0{,}267$ [5]. Подставив (18) в (15), найдем профиль скоростей в точке отрыва в форме:

$$\frac{u}{U} = \bar{u} = \sqrt{\bar{z}}. \tag{19}$$

Приведенные выше формулы для радиального диффузора совпадают с полученными в [5] для плоского диффузора с положительным градиентом давлений.

Определим параметры турбулентного пограничного слоя. Для этого получим вначале интегральные условия Кармана, как в [1], путем элементарных преобразований системы (1)—(2) и интегрирования по z (1) с помощью (2) и граничных условий (3):

$$\frac{\partial\delta^{**}}{\partial r} + \delta^{**}\left[\frac{U'}{U}(2+H)\frac{1}{r}\right] = \frac{\tau_0}{\rho U^2}, \tag{20}$$

где $\delta^* = \delta\cdot\int\limits_0^1 (1-\bar{u})\,d\bar{z} = \delta\frac{A_1}{x}$ — толщина вытеснения; (21)

$\delta^{**} = \delta\cdot\int\limits_0^1 (1-\bar{u})\bar{u}\cdot d\bar{z} = \delta\left(\frac{A_1}{x} - \frac{A_2}{x^2}\right)$ — толщина потери импульса; (22)

$$H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}};$$

A_1 и A_2 — функции формпараметра λ, найденные с помощью (8) и соответственно равны:

$$A_1(\lambda) = \frac{2}{3}\cdot\frac{t^2+t+1}{t+1}; \tag{23}$$

$$A_2(\lambda) = \frac{2t^3+2t^2+6t-2}{3(t+1)} + \frac{8}{3(t^2-1)}\left[\ln(1+t) - \ln 2\right], \tag{24}$$

где $t = \sqrt{1+\lambda}$.

При $\lambda = 0$, $A_1 = 1$; $A_2 = 2$.

Отношения условных толщин будут иметь вид:

$$H^* = \frac{\delta^*}{\delta} = \frac{A_1}{x}; \qquad H^{**} = \frac{\delta^{**}}{\delta} = \frac{A_1}{x} - \frac{A_2}{x^2}; \qquad H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}} =$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{1}{x}}. \tag{25}$$

В точке отрыва (где λ обращается в бесконечность), если использовать (19) для (21) и (22), получим:

$$H^*_{\text{отр}} = \frac{1}{3}; \; H^{**}_{\text{отр}} = \frac{1}{6}; \; H_{\text{отр}} = 2. \tag{26}$$

Используя соотношения (25б), исключим δ из закона сопротивления:

$$R_* = \frac{v_* \cdot \delta}{\nu} = \frac{k}{x} \cdot \frac{R^{**}}{H^{**}}, \tag{27}$$

где

$$R^{**} = \frac{U \cdot \delta^{**}}{\nu}; \quad x = \frac{k \cdot U}{v_*},$$

и выражение (13) примет вид:

$$x - \frac{\alpha^2}{2} \frac{\lambda}{R^{**}}\left(A_1 - \frac{A_2}{x}\right) + 2\sqrt{1 + \frac{\alpha}{k} \cdot \frac{\lambda}{R^{**}}\left(A_1 - \frac{A_2}{x}\right)} +$$

$$+ \ln \frac{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{k} \cdot \frac{\lambda}{R^{**}}\left(A_1 - \frac{A_2}{x}\right)} - 1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{k} \cdot \frac{\lambda}{R^{**}}\left(A_1 - \frac{A_2}{x}\right)} + 1} = \psi(\lambda), \tag{28}$$

где

$$\psi(\lambda) = k \cdot x + 2\sqrt{1 + \lambda} + \ln \frac{\sqrt{1 + \lambda} - 1}{\sqrt{1 + \lambda} + 1}$$

Необходимо отметить, что все полученные формулы справедливы при всех положительных и небольших отрицательных градиентах, а при $\lambda < -1$ теряют смысл. Уравнение (28) служит для определения параметров (25) и коэффициента C_f в виде семейств кривых, что понадобится в дальнейшем при интегрировании (20).

$$c_f = 2\frac{k^2}{x^2} = c_f(R^{**}, \lambda); \qquad \text{(а)}$$

$$H^* = \frac{A_1(\lambda)}{x} = H^*(R^{**}, \lambda); \qquad \text{(б)}$$

$$H^{**} = \frac{A_1(\lambda)}{x^2} - \frac{A_2(\lambda)}{x^2} = H^{**}(R^{**}, \lambda); \quad \text{(в)} \tag{29}$$

$$H = \frac{H^*}{H^{**}} = \frac{1}{1 - \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{1}{x}} = H(R^{**}, \lambda). \qquad \text{(г)}$$

Из соотношений (29) можно исключить параметр λ с помощью:

$$P = -\frac{\overline{U}'}{\overline{U}^2}\cdot\frac{1}{Re_0} = \frac{\lambda\cdot\frac{k^2}{x^2}\cdot H^{**}}{R^{**}} = f(R^{**}, \lambda), \qquad (30)$$

где

$$\overline{U} = \frac{U}{U_0},\ \overline{U}' = \frac{d\overline{U}}{d\overline{r}}, \qquad Re_0 = \frac{U_0 r_0}{\nu},$$

после чего получим необходимые для вычисления функции, уже от параметров R^{**} и P. Теперь приступим к интегрированию уравнения (20), которое сначала приведем к безразмерному виду:

$$\frac{\partial R^{**}}{\partial\overline{r}} + R^{**}\left[\frac{\overline{U}'}{\overline{U}}\cdot B + \frac{1}{\overline{r}}\right] = Re_0\cdot\overline{U}\cdot A, \qquad (31)$$

где

$$R^{**} = \frac{U\cdot\delta^{**}}{\nu}, \quad \overline{r} = \frac{r}{r_0}, \quad A = \frac{k^2}{x^2} = \frac{1}{2}C_f, \ B = 1 + H, \ \overline{U} = \frac{U}{U_0}.$$

Для дальнейшего вычисления представим $A = A_0 + \Delta A$ и $B = B_0 + \Delta B$, где A_0 и B_0 определяются из условия $\lambda = 0$, т. е. при нулевом продольном градиенте, а ΔA и ΔB — как некоторые поправки; далее, умножив (31) на $\overline{U}^{B_0}$, можно привести последнее уравнение (31) к виду:

$$\frac{\partial}{\partial\overline{r}}(\overline{U}^{B_0}\cdot R^{**}) = \frac{A_0 Re\cdot\overline{U}^{B_0}}{\overline{r}}\left[1 - \frac{1}{A_0}\left(\Delta A + \Delta B\cdot P\cdot R^{**} - \frac{R^{**}}{Re}\right)\right]. \qquad (32)$$

Проинтегрировав последнее выражение по $\overline{r}$, получим:

$$R^{**} = \frac{1}{\overline{U}^{B_0}}\left\{A_0 Re_0\int_1\overline{U}^{B_0+1}\left[1 + F(R^{**}, P, Re)\right]d\overline{r} + \overline{U}_0^{B_0}\cdot R_0^{**}\right\}, \qquad (33)$$

где

$$F(R^{**}, P, Re) = \frac{1}{A_0}\left(\Delta A + \Delta B\cdot P\cdot R^{**} - \frac{R^{**}}{Re}\right).$$

Это интегральное уравнение решается методом последовательных приближений, так как при внутренней задаче имеется значительное влияние пограничного слоя на ядро течения, и вначале нам неизвестен закон изменения скорости в последнем. Поэтому мы должны задаться каким-либо приближенным законом $\overline{U} = \overline{U}(\overline{r})$. Полагая $F = 0$ и по принятой зависимости $\overline{u} = \overline{u}(\overline{r})$, определяем по уравнению (33) R_1^{**} (первое приближение), после чего определяем поправки ΔA, ΔB и F. Затем, взяв для второго приближения $F(R^{**}, P, Re) = F(R_1^{**}, P, Re)$, после графического интегрирования (33) находим R_2^{**}. Далее продолжаем этот процесс до совпадения двух последних просчетов.

Как уже говорилось выше, в качестве A_0 и B_0 примем значения функций A и B при нулевом продольном градиенте и при средних значениях R^{**}. Вид функций $A = A(R^{**}, P)$ и $B = B(R^{**}, P)$ может быть установлен из (28). Так как все входящие в эти выражения величины являются функциями λ и x, то при заданном значении параметра λ число $R^{**} = R^{**}(x)$; и эти величины будут функциями R^{**} и λ. Необходимые для расчета зависимости представлены в (29).

Ввиду того, что распределение скорости в ядре течения не может быть вычислено из расчета потенциального течения, то примем закон $\overline{u} = \overline{u}(\overline{r})$ из следующих соображений. Запишем уравнение постоянства расхода для нашего случая (см. фиг. 1) в виде:

$$2\pi \cdot r_0 \cdot U_0 \cdot h_0 = 2\pi r \left[U \cdot (h - \delta) + \int_{z=z_\delta}^{z=h} u \cdot dz \right] = 2\pi r \cdot U \cdot h \cdot \left(1 - \frac{\delta^*}{h}\right),$$

где левая часть — расход через входное сечение диффузора, а правая расход через цилиндрическое сечение на расстоянии, или

$$\overline{U}(\overline{r}) = \frac{1}{\overline{r} \cdot \overline{h} \cdot (1 - \overline{\delta^*})}, \tag{34}$$

где

$$\overline{U}(\overline{r}) = \frac{U}{U_0}, \quad \overline{h} = \frac{h}{h_0}, \quad \overline{\delta^*} = \frac{\delta^*}{h}.$$

Полагая для первого приближения $\overline{\delta^*} = 0$, получим закон изменения скорости в ядре течения в зависимости от $\overline{r}$:

$$\overline{U}(\overline{r}) = \frac{1}{\overline{r} \cdot \overline{h}}. \tag{35}$$

В случае диффузора, образованного двумя дисками:

$$\overline{U}_1(\overline{r}) = \frac{1}{\overline{r}}. \tag{35a}$$

Принятие формулы (35 а) для слабо расширяющегося канала имеет практический смысл: в данном случае возможно сужение ядра, что может даже привести к увеличению скорости в нем, и, пренебрегая изменением h в (35 а), мы тем самым сократим число приближений при решении (33), так как будем ближе к действительности, чем приняв закон (35). Итак, приняв (35 а), с помощью (33) определяем δ_1^* первого приближения, после чего находим новый закон изменения скорости вдоль радиуса $\overline{U} = \overline{U}_2(\overline{r})$ и определяем δ_2^* второго приближения. Этот процесс продолжаем до совпадения двух последних просчетов.

Для вычисления полного коэффициента потерь воспользуемся тем же приемом, что и в [6], то есть через параметры пограничного слоя. Только при этом надо учесть, что $\frac{h_0}{r_0}$ должно быть достаточно велико, чтобы не было участка стабилизированного течения, которое здесь не рассматривается, и при условии безотрывного пограничного слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Г. Лойцянский. Аэродинамика пограничного слоя, ОГИЗ, Л.-М., 1941.

2. А. С. Гиневский, Е. Е. Солодкин. Влияние поперечной кривизны поверхности на характеристики осесимметричного пограничного слоя. Прикладная математика и механика, т. XXII, вып. 6, 1958.

3. Г. Н. Ден. Пограничный слой в безлопаточном диффузоре». ИВУЗ. Серия «Энергетика», № 5, 1961.

4. К. К. Федяевский, А. С. Гиневский. Метод расчета турбулентного пограничного слоя при наличии продольного градиента давлений. Журнал технической физики, т. XXVII, вып. 2, 1957.

5. А. С. Гиневский. Расчет потерь в расширяющихся и сужающихся каналах. Промышленная аэродинамика, вып. 7, ВНИ ЦАГИ, 1956.