КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
ТРУДЫ. ВЫПУСК XXIV. 1966 г.
Вопросы механики жидкостей и газов

И. И. ГУСЕВ

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ДИАФРАГМЕ ВИХРЕВОЙ ТРУБЫ

Одним из путей увеличения эффективности вихревой трубы является устранение эффекта помешивания в холодный поток теплого пограничного слоя, текущего по торцевой плоскости диафрагмы.

Экспериментальная установка и экспериментальная часть настоящего исследования описаны в предыдущей статье*. Известно, что при вводе сжатого воздуха через тангенциальные сопловые входы в трубе образуется интенсивный вихрь. Если отношение давлений сжатого воздуха перед соплом P_1 и на оси вихря P_0

$$\frac{P_1}{P_0} \leq 4{,}15, \tag{1}$$

то, согласно гипотезе взаимодействия вихрей [1], по всему сечению поток имеет закон вращения твердого тела, т. е. закон постоянства угловой скорости

$$\omega = \text{const}. \tag{2}$$

При этом радиальный градиент давления и центробежная сила взаимно уравновешиваются, что соответствует соотношению

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} = \frac{v^2}{r}. \tag{3}$$

Для частиц пограничного слоя азимутальная скорость понижена вследствие торможения силами вязкости, поэтому здесь центробежная сила значительно уменьшается, между тем как положительный радиальный градиент давления остается таким же, как

* См. статью А. П. Меркулова, Г. В. Филиппова, И. И. Гусева. О влиянии пограничного слоя на температуру холодного потока вихревой трубы. Настоящий сборник, стр. 95.

и на большом расстоянии от диафрагмы. В результате вблизи диафрагмы возникает радиальное течение, направленное к оси. Если предположить, что в пограничном слое на диафрагме энергетическое разделение потока отсутствует полностью или частично, то радиальное течение приводит к подмешиванию пограничного слоя к холодному потоку и подогреву последнего. Таким образом, для оценки температурного влияния пограничного слоя на холодный поток необходимо определить расход воздуха через пограничный слой в радиальном направлении для различных режимов работы вихревой трубы.

Газодинамическое исследование структуры пограничного слоя на диафрагме сводилось к определению главных векторов скорости и толщины пограничного слоя для различных значений давления воздуха на входе в вихревую трубу на различных радиусах диафрагмы. Экспериментально установленные пределы изменения скорости и температуры по толщине пограничного слоя позволили принять условия несжимаемости и изотермичности потока при теоретическом решении задачи. Для теоретического решения воспользуемся уравнением Навье-Стокса и уравнением сохранения массы. В векторной форме эти уравнения записываются в следующем виде:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\vec{F} - \mathrm{grad}\, P + \mu\nabla^2\vec{v} + \frac{1}{3}\mu\, \mathrm{grad}\, \mathrm{div}\, \vec{v}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\, \mathrm{div}\, \vec{V} = 0. \qquad (4)$$

Поскольку задача связана с осесимметричным вихревым потоком, аналитическое исследование пограничного слоя целесообразно проводить в цилиндрических координатах. Имея в виду осевую симметрию вихревого потока, опустим производные по азимутальному направлению, а также, пользуясь обычными допущениями теории пограничного слоя, из всех членов, зависящих от вязкости, сохраним лишь те, которые представляют производные по направлению нормали к плоскости диафрагмы.

В результате получим:

$$V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_\Theta^2}{r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r},$$

$$V_r \frac{\partial V_\Theta}{\partial r} + \frac{V_r V_\Theta}{r} + V_z \frac{\partial V_\Theta}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 V_\Theta}{\partial z^2}, \qquad (5)$$

$$V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0.$$

В уравнениях (5) r, Θ, z — цилиндрические координаты v_r, v_Θ, v_z, соответствующие скорости в радиальном, азимутальном и осевом направлениях.

Если в первом уравнении системы (5) откинуть члены, зависящие от вязкости, и положить $v_r = 0$, $v_\Theta = \omega \cdot r$, $v_z = 0$, т. е. рассмотреть движение потока вне пограничного слоя, то получим:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v_\Theta^2}{r} = \rho \omega^2 r \quad p = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2. \tag{6}$$

Исследования турбулентного пограничного слоя на стенке замкнутого кожуха, проведенные Шульцем — Грюновым [3], показали, что параболическое распределение давления хорошо оправдывается.

Дальнейшие преобразования системы (5) при граничных условиях

$$\begin{aligned} v_r &= 0, \quad v_\Theta = 0, \quad v_z = 0 \quad \text{при } z = 0 \\ v_r &= 0, \quad v_\Theta = \omega, \qquad\quad \text{при } z = \delta \end{aligned} \tag{7}$$

приводят к уравнению количества движения и уравнению момента количества движения

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r \int_0^\delta v_r^2 \, dz\right) - \int_0^\delta v_\Theta^2 dz = -\nu r \left(\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)_{z=0} - r \frac{1}{\rho} \int_0^\delta \frac{\partial p}{\partial r} \, dz, \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \int_0^\delta v_r v_\Theta dz\right) - r^2 \omega \frac{\partial}{\partial r}\left(r \int_0^\delta v_r dz\right) = -\nu r^2 \left(\frac{\partial V_\Theta}{\partial z}\right)_{z=0}. \tag{9}$$

Имея в виду экспериментальные профили радиальной и азимутальной скорости

$$\begin{aligned} v_r &= 1{,}54 \cdot v_{r\,\max} \left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \cdot \left(1 - \frac{z}{\delta}\right), \\ v_\Theta &= v_{\Theta\,\max} \left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \end{aligned} \tag{10}$$

и уравнения (8) и (9), можно вычислить ряд интегралов

$$\int_0^\delta v_r \cdot dz = 0{,}630 v_{r\max} \cdot \delta \qquad \int_0^\delta v_r^2 \, dz = 0{,}409 v_{r\max}^2 \cdot \delta \tag{11}$$

$$\int_0^\delta v_\Theta^2 \, dz = 0{,}778 \cdot r^2 \omega^2 \cdot \delta \qquad \int_0^\delta v_r \cdot v_\Theta \, dz = 0{,}525 v_{r\max} \cdot r \cdot \omega \cdot \delta.$$

Используя известные выражения для касательных напряжений турбулентного пограничного слоя

$$\tau_r = 0{,}0225 \rho \left(\frac{\nu}{\delta}\right)^{\frac{1}{4}} (r\omega)^{\frac{3}{4}} \cdot v_{r\max} \left(\frac{v_{r\max}^2}{r^2 \omega^2} + 1\right)^{\frac{3}{8}} \cdot \tag{12}$$

и пренебрегая величиной

$$\frac{v_{\varphi\max}^2}{r^2\omega^2} \ll 1,$$

после подстановки (11) и (12) в (8) и (9) получим систему дифференциальных уравнений

$$0{,}409\left(\delta\cdot v_{\varphi\max}^2\cdot r\right)' - 0{,}778r^2\omega^2\delta + r^2\omega^2\delta = 0{,}0225\left(\frac{\nu}{\delta}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot v_{\varphi\max}\cdot r^{\frac{7}{4}}\omega^{\frac{3}{4}} \tag{13}$$

$$0{,}525\omega\left(r^3\delta v_{\varphi\max}\right)' - 0{,}630\cdot r^3\omega\left(r\cdot\delta\cdot v_{\varphi\max}\right)' = 0{,}0225\left(\frac{\nu}{\delta}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot r^{\frac{15}{4}}\cdot\omega^{\frac{7}{4}}.$$

Для упрощения решения системы (13) введем следующие обозначения

$$\Phi = v_{\varphi\max}\cdot\delta;\quad x = \frac{b-r}{b};\quad d = \delta^{\frac{1}{4}}, \tag{14}$$

где b — радиус вихревой трубы;
r — текущий радиус;
δ — толщина пограничного слоя.

После подстановки (14) и (13) уравнения (13) принимают вид:

$$\Phi^2 d + 4(1-x)\Phi^2\cdot d' - 2\Phi\Phi'\cdot d(1-x) + 0{,}452b^2\omega^2(1-x)^2d^9 =$$
$$= 0{,}046\omega^{\frac{3}{4}}\nu^{\frac{1}{4}}b^{\frac{7}{4}}\Phi\left(1-\frac{7}{4}x+\frac{21}{32}x^2-\frac{21}{384}x^3\right). \tag{15}$$

$$\Phi\cdot d + 0{,}111(1-x)\Phi'\cdot d = 0{,}024\nu^{\frac{1}{4}}b^{\frac{7}{4}}\omega^{\frac{3}{4}}\left(1-\frac{7}{4}x+\frac{21}{32}x^2-\frac{21}{384}x^3\right).$$

Ищем решение системы (15) в виде степенных рядов

$$\Phi = x^{\frac{9}{10}}\left(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots\right), \tag{16}$$

$$d = x^{\frac{1}{10}}\left(d_0 + d_1x + d_2x^2 + \cdots\right).$$

После подстановки (16) в (15) и выполнения ряда несложных преобразований решение системы (15) получим в виде:

$$\Phi = x^{\frac{9}{10}}\omega^{\frac{4}{5}}\nu^{\frac{1}{5}}b^{\frac{8}{5}}\left(0{,}282 - 1{,}270x + 1{,}610x^2\right).$$

$$d = x^{\frac{1}{10}}\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^{\frac{1}{20}}b^{\frac{3}{20}}\left(0{,}852 - 1{,}090x + 1{,}580x^2\right). \tag{17}$$

Исследование пограничного слоя на диафрагме вихревой трубы проведено для значений $x = 0{,}5$; 0,4; 0,3; 0.2; при постоянном давлении воздуха перед соплом $P = 1{,}26$ *ата*, а также для постоянного значения $x = 0{,}4$ и переменном давлении сжатого воздуха перед соплом $P = 1{,}51$; 1,38; 1,30; 1,20; 1,15 *ата*.

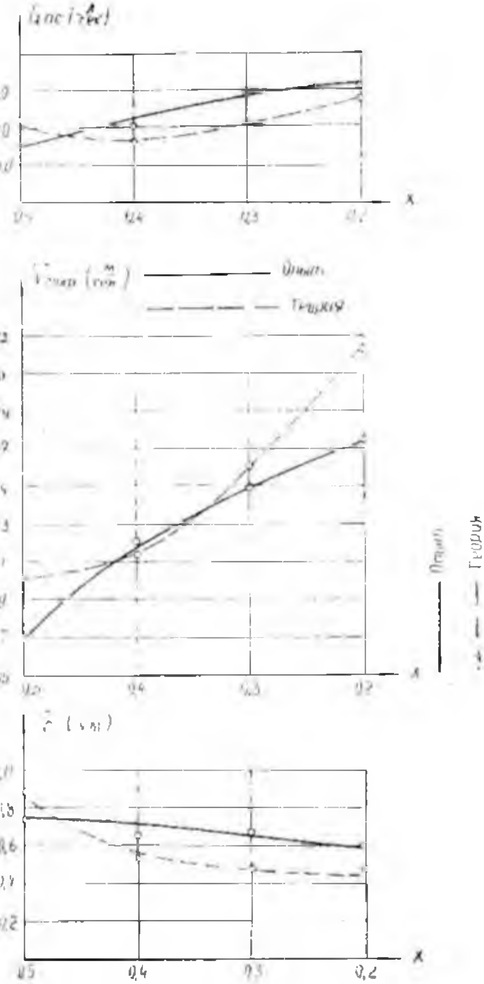
На фиг. 1 приводится сравнение теории с экспериментом.

ВЫВОДЫ

1. В предлагаемой работе сделана попытка теоретического решения поставленной задачи.

Как показало проведенное исследование, наибольшая расходимость теории с экспериментом отмечается в точках, лежащих вблизи отверстия диафрагмы, а также в точках, ближайших к периферии трубы. Это можно объяснить конечным числом сопел и наличием отверстия диафрагмы. Кроме того, принятые условия изотермичности и несжимаемости пограничного слоя вносят некоторую погрешность в решение задачи.

2. Несмотря на ряд недостатков полученного решения, оно может найти практическое применение при анализе работы вихревой трубы и при уточнении ее теоретических характеристик. Как показали эксперименты, отвод пограничного слоя с диафрагмы позволяет на 15—20% увеличить эффективность работы вихревой трубы.



Фиг. 1.

3. Необходимы дальнейшие экспериментальные и теоретические исследования для расширения области расчета пограничного слоя диафрагмы на большие перепады давления в вихре с целью приближения их к рабочему диапазону вихревой трубы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Меркулов. Теоретические основы вихревого эффекта. Труды конференции по перспективам развития и внедрения холодильной техники в народное хозяйство СССР. Госторгиздат, 1963.
2. Г. Шлихтинг. Теория пограничного слоя. Издательство иностранной литературы, Москва, 1956.
3. Schultz-Grunow F. Der Reibungswiederstand rotierenden Scheiben in Gehänsen, ZAMM, 15 (1935).