КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
ТРУДЫ. ВЫПУСК XXIV 1966 г.
Вопросы механики жидкостей и газов

Л. И. КУДРЯШЕВ, А. А. ГУСАКОВ

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕПЛООТДАЧИ ОТ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ МАЛОГО РАДИУСА

Принятые обозначения

$\xi = \frac{r}{R}$, Θ(*рад*) — безразмерные сферические координаты с началом, помещенным в центр сферической частицы радиуса R;

v_ξ, v_θ — безразмерные сферические проекции скорости;

$\vartheta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}$ — безразмерная температура (T, T_w, T_∞ — температура в данной точке, на поверхности частицы и в невозмущенной среде соответственно);

$$Pr = \frac{\nu}{a}; \quad Re = \frac{2Rv_\infty}{\nu}; \quad Gr = \frac{(2R)^3 \beta g\,(T_w - T_\infty)}{\nu^2}; \quad Nu = \frac{\alpha \cdot 2R}{\lambda}$$

— критерии Прандтля, Рейнольдса, Грасгофа и Нуссельта соответственно.

В предлагаемой работе рассматривается приближенный метод определения коэффициента теплообмена твердой сферической нагретой поверхности малого радиуса, помещенной в сплошную вязкую среду при вынужденной, естественной или смешанной конвекции, в случае предварительного задания приближенных полей скоростей, соответствующих рассматриваемым режимам.

В режиме вынужденной конвекции, когда поле скоростей предполагается независимым от температуры, оно определяется известными формулами Стокса, полученными для малых чисел Рейнольдса. В случае естественной и смешанной конвекции приближенное поле скоростей может быть определено предложенным авторами методом*, основанным на искусственном разделении «гид-

* См. статью Л. И. Кудряшева, А. А. Гусакова «Влияние свободной конвекции на поле скоростей и давлений при обтекании сферы потоком при малых числах Рейнольдса», настоящий сборник, стр. 39.

родинамической» и «тепловой» систем в общей системе дифференциальных уравнений и последующем интегрировании гидродинамической системы. Таким образом, во всех отмеченных случаях поле скоростей может быть представлено следующими зависимостями в безразмерной сферической системе координат с учетом осевой симметрии:

а) для вынужденной конвекции

$$v_\xi = \varphi_1(\xi)\cdot\cos\Theta; \tag{1}$$

$$v'_\Theta = -\varphi_2(\xi)\cdot\sin\Theta;$$

б) для естественной конвекции

$$v_\xi = Gr^{1/2}\,\psi_1(\xi)\cdot\cos\Theta; \tag{2}$$

$$v'_\Theta = -Gr^{1/2}\,\psi_2(\xi)\cdot\sin\Theta;$$

в) для смешанной конвекции

$$v_\xi = \left[\varphi_1(\xi) \pm \frac{Gr}{Re}\psi_1(\xi)\right]\cdot\cos\Theta;$$

$$v'_\Theta = -\left[\varphi_2(\xi) \pm \frac{Gr}{Re}\psi_2(\xi)\right]\cdot\sin\Theta. \tag{3}$$

В формулах (1)—(3):

$$\varphi_1(\xi) = 1 - \frac{3}{2}\frac{1}{\xi} + \frac{1}{2}\frac{1}{\xi^3};\quad \psi_1(\xi) = \frac{0{,}679}{\xi} - \frac{0{,}928}{\xi^{1{,}445}} + \frac{0{,}428}{\xi^{2{,}802}} - \frac{0{,}179}{\xi^3}; \tag{4}$$

$$\varphi_2(\xi) = 1 - \frac{3}{4}\frac{1}{\xi} - \frac{1}{4}\frac{1}{\xi^3};\quad \psi_2(\xi) = \frac{0{,}339}{\xi} - \frac{0{,}257}{\xi^{1{,}445}} - \frac{0{,}172}{\xi^{2{,}802}} + \frac{0{,}090}{\xi^3}.$$

В формулах (3) и в дальнейшем при наличии двойных знаков верхний соответствует случаю совпадения направлений свободной и вынужденной конвекций, нижний — взаимной противоположности этих направлений.

Дифференциальные уравнения неразрывности и теплового баланса для любого из режимов могут быть записаны в виде:

$$\frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial v'_\Theta}{\partial \Theta} + \frac{2v_\xi}{\xi} + \frac{v'_\Theta \operatorname{ctg}\Theta}{\xi} = 0; \tag{5}$$

$$v_\xi\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} + \frac{v'_\Theta}{\xi}\frac{\partial \vartheta}{\partial \Theta} = \frac{2}{Pr\cdot K}\left[\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi^2\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}\right)\right]. \tag{6}$$

При этом, $K = Re$ для случая вынужденной и смешанной конвекций, и $K = Gr^{1/2}$ — для естественной конвекции.

Вводя в рассмотрение область теплового влияния* и предполагая, что на внешней границе области $\xi = \Delta(\Theta)$ условия для температуры аналогичны соответствующим условиям на бесконечности, представим граничные условия для температуры в виде:

---

* См. статью Л. И. Кудряшева, А. А. Гусакова. «О влиянии конвективного теплообмена на теплоотдачу нагретых частиц весьма малого размера», настоящий сборник, стр. 29.

при $\xi = 1$ $(v_\xi = v'_\Theta = 0)$ $\vartheta = 1$;

при $\xi = \Delta(\Theta)$ $\vartheta = 0$; $\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi} = 0$*. (7)

При учете (7), а также задании скорости в виде (1), (2) или (3), уравнения (5), (6) в области теплового влияния могут быть приведены к интегральному соотношению:

$$\frac{d\chi(\Delta)}{d\Theta} + 2\operatorname{ctg}\Theta\cdot\chi(\Delta) = \frac{2}{Pr\cdot K_1}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}\right)_{\xi=1}\cdot\frac{1}{\sin\Theta}, \quad (8)$$

где

$$\chi(\Delta) = \int\limits_1^\Delta \xi\cdot m_к\cdot\vartheta d\xi, \quad (9)$$

и $K_1 = Re$, $m_к = \varphi_2(\xi)$ — для вынужденной конвекции; (10)

$K_1 = Gr$, $m_к = \psi_2(\xi)$ — для естественной конвекции; (11)

$K_1 = Re$, $m_к = \varphi_2(\xi) + \frac{Gr}{Re}\psi_2(\xi)$ — для смешанной конвекции. (12)

Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi = \frac{\chi}{\chi_\pi}, \quad (13)$$

где $\chi_\pi = \chi\,[\Delta(\Theta = \pi)] = \chi(\Delta_\pi)$ — значение рассматриваемой функции $\chi(\Delta)$ в передней критической точке сферы $(\Theta = \pi)$.

В этом случае уравнение (8) запишется в виде:

$$\frac{d\Phi}{d\Theta} + 2\operatorname{ctg}\Theta\cdot\Phi = -\frac{2\lambda(\Theta)}{\sin\Theta}, \quad (14)$$

где

$$\lambda(\Theta) = \frac{\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}\right)_{\xi=1}}{\left(\frac{d\vartheta_\pi}{d\xi}\right)_{\xi=1}}, \quad (15)$$

и $\vartheta_\pi = \vartheta(\xi, \Theta = \pi)$ — распределение температур в передней критической точке.

Легко видеть, что при $\Theta = \pi$ $\Phi = 1$, $\lambda = 1$. (16)

Выбирая из множества решений уравнения (14) решение, удовлетворяющее условиям (16), с учетом (13) запишем:

$$\frac{\chi}{\chi_\pi} = \frac{2\int\limits_\Theta^\pi \lambda(\Theta)\cdot\sin\Theta\cdot d\Theta}{\sin^2\Theta}. \quad (17)$$

Рассмотрим функцию $\lambda(\Theta)$.

Обозначим $\lambda_0 = \lambda(0) = \frac{\left(\frac{d\vartheta_0}{d\xi}\right)_{\xi=1}}{\left(\frac{d\vartheta_\pi}{d\xi}\right)_{\xi=1}}$ — значение $\lambda(\Theta)$ при $\Theta = 0$ в хво-

---

* Второе условие следует из физических соображений

…вой критической точке. Очевидно, в передней критической точке ($\Theta = \pi$) $\lambda(\pi) = 1$. Тогда, $\lambda_0 \leqslant \lambda(\Theta) \leqslant 1$.

Естественно предположить, что величина $\lambda(\Theta)$ с изменением Θ от $\Theta = 0$ до $\Theta = \pi$ непрерывно возрастает от минимального значения λ_0 до максимального значения $\lambda(\pi) = 1$. Представим, учитывая это, $\lambda(\Theta)$ в виде функции, обеспечивающей одновременно симметричность процесса и его непрерывность в критических точках, иначе говоря, потребуем выполнения условий:

$$\begin{aligned} &\text{при } \Theta = \pi \quad \lambda = 1, \quad \frac{d\lambda}{d\Theta} = 0; \\ &\text{при } \Theta = 0 \quad \lambda = \lambda_0 \quad \frac{d\lambda}{d\Theta} = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Поставленным условиям удовлетворяет функция

$$\lambda(\Theta) = \frac{1+\lambda_0}{2} - \frac{1-\lambda_0}{2}\cos\Theta. \tag{19}$$

Отметим, при $\lambda_0 = 1$, что соответствует случаю чистой теплопроводности, $\lambda(\Theta) = 1$ при любых Θ — область влияния обращается в сферу.

Подставляя значение $\lambda(\Theta)$, определенное по (19), в формулу (1…) и интегрируя, находим:

$$\frac{\chi}{\chi_\pi} = \frac{1-\lambda_0}{2} + \frac{1+\lambda_0}{2\sin^2\frac{\Theta}{2}}. \tag{20}$$

Из уравнения (8) при $\Theta = \pi$ $\chi_\pi = -\frac{\left(\frac{d\vartheta_\pi}{d\xi}\right)_{\xi=1}}{Pr\cdot K_1}$. Подставляя эти значения в формулу (20), получаем:

$$\chi = -\frac{\left(\frac{d\vartheta_\pi}{d\xi}\right)_{\xi=1}}{2\,Pr\cdot K_1}\left(1-\lambda_0+\frac{1+\lambda_0}{\sin^2\frac{\Theta}{2}}\right). \tag{21}$$

Входящие в формулу (21) величины λ_0 и $\left(\frac{d\vartheta_\pi}{d\xi}\right)_{\xi=1}$ определяются из непосредственного рассмотрения уравнения теплового баланса (6) в передней критической точке ($\Theta = \pi$) и хвостовой критической точке ($\Theta = 0$).

Обозначим, аналогично (10)—(12):

$n_к = \varphi_1(\xi)$ — для вынужденной конвекции; (22)

$n_к = Gr^{1/4}\psi_1(\xi)$ — для естественной конвекции; (23)

$n_к = \varphi_1(\xi) \pm \frac{Gr}{Re}\psi_1(\xi)$ — для смешанной конвекции. (24)

Тогда в общем случае

$$v_\xi = n_к\cos\Theta. \tag{25}$$

Учитывая, что при $\Theta = \pi$ $v_\Theta = 0$ и $v_\xi = -n_к$, уравнение (6) для передней критической точки запишем в виде:

$$\frac{d^2\vartheta_\pi}{d\xi^2} + \left[\frac{2}{\xi} + \frac{Pr \cdot K}{2} n_к(\xi)\right]\frac{d\vartheta_\pi}{d\xi} = 0. \tag{26}$$

Граничные условия очевидны:

$$\begin{aligned} &\text{при } \xi = 1 \quad \vartheta_\pi = 1; \\ &\text{при } \xi \to \infty \quad \vartheta_\pi = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

В хвостовой критической точке ($\Theta = 0$; $v_\Theta' = 0$; $v_\xi = n_к$) уравнение (6) принимает вид:

$$\frac{d^2\vartheta_0}{d\xi^2} + \left[\frac{2}{\xi} - \frac{Pr \cdot K}{2} n_к(\xi)\right]\frac{d\vartheta_0}{d\xi} = 0; \tag{28}$$

граничные условия:

$$\begin{aligned} &\text{при } \xi = 1 \quad \vartheta_0 = 1; \\ &\text{при } \xi \to \infty \quad \vartheta_0 = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Из уравнения (26) при условиях (27) и уравнения (28) при условиях (29) можно определить соответственно:

$$\frac{d\vartheta_\pi}{d\xi} = -\frac{\frac{1}{\xi^2}\exp\left[-\frac{PrK}{2}\int n_к(\xi)d\xi\right]}{\int\limits_1^\infty \frac{1}{\xi^2}\exp\left[-\frac{PrK}{2}\int n_к(\xi)d\xi\right]d\xi}; \tag{30}$$

$$\frac{d\vartheta_0}{d\xi} = -\frac{\frac{1}{\xi^2}\exp\left[+\frac{PrK}{2}\int n_к(\xi)d\xi\right]}{\int\limits_1^\infty \frac{1}{\xi^2}\exp\left[+\frac{PrK}{2}\int n_к(\xi)\,d\xi\right]d\xi}. \tag{31}$$

При $\xi = 1$:

$$\left(\frac{d\vartheta_\pi}{d\xi}\right)_{\xi=1} = -\frac{\exp\left[-\frac{PrK}{2}\int n_к(\xi)d\xi\right]_{\xi=1}}{\int\limits_1^\infty \frac{1}{\xi^2}\exp\left[-\frac{PrK}{2}\int n_к(\xi)d\xi\right]d\xi};$$

$$\left(\frac{d\vartheta_0}{d\xi}\right)_{\xi=1} = -\frac{\exp\left[+\frac{PrK}{2}\int n_к(\xi)d\xi\right]_{\xi=1}}{\int\limits_1^\infty \frac{1}{\xi^2}\exp\left[+\frac{PrK}{2}\int n_к(\xi)d\xi\right]d\xi}; \tag{32}$$

$$\lambda_0 = \exp\left[+PrK\int n_к(\xi)d\xi\right]_{\xi=1} \cdot \frac{\int\limits_1^\infty \frac{1}{\xi^2}\exp\left[-\frac{PrK}{2}\int n_к(\xi)d\xi\right]d\xi}{\int\limits_1^\infty \frac{1}{\xi^2}\exp\left[+\frac{PrK}{2}\int n_к(\xi)\,d\xi\right]d\xi}. \tag{33}$$

Обозначая $A_к = \frac{PrK}{2}\int n_к(\xi)d\xi,$ (34)

формулы (32) и (33) перепишем в виде:

$$\left(\frac{d\vartheta_\pi}{d\xi}\right)_{\xi=1} = -\frac{\exp(-A_к)_{\xi=1}}{\int\limits_1^\infty \frac{1}{\xi^2}\exp(-A_к)\,d\xi};\quad \lambda_0 = \exp(2A_к)_{\xi=1}\cdot\frac{\int\limits_1^\infty \frac{1}{\xi^2}\exp(-A_к)\,d\xi}{\int\limits_1^\infty \frac{1}{\xi^2}\exp(+A_к)\,d\xi}. \quad (35)$$

При этом, в случаях:

а) вынужденной конвекции

$$A_{КВ} = \frac{PrRe}{2}\int \varphi_1(\xi)\,d\xi = \frac{PrRe}{2}\left(\xi - \frac{3}{2}\ln\xi - \frac{1}{4}\,\frac{1}{\xi^3}\right); \quad (36)$$

б) естественной конвекции

$$A_{КЕ} = \frac{PrGr}{2}\int \psi_1(\xi)d\xi = \frac{PrGr}{2}\cdot\left(0{,}679\ln\xi + \frac{2{,}085}{\xi^{0{,}445}} - \frac{0{,}238}{\xi^{1{,}802}} + \frac{0{,}090}{\xi^2}\right); \quad (37)$$

в) смешанной конвекции

$$A_{КС} = \frac{PrRe}{2}\int\left[\varphi_1(\xi) \pm \frac{Gr}{Re}\psi_1(\xi)\right]d\xi = A_{КВ} \pm A_{КЕ} = \frac{PrRe}{2}\times$$

$$\times\left(\xi - \frac{3}{2}\ln\xi - \frac{1}{4}\,\frac{1}{\xi^3}\right) \pm \frac{PrGr}{2}\left(0{,}679\ln\xi + \frac{2{,}085}{\xi^{0{,}445}} - \frac{0{,}238}{\xi^{1{,}802}} + \frac{0{,}090}{\xi^2}\right). \quad (38)$$

Вычисление соотношений (35) целесообразно проводить с помощью электронно-вычислительных машин.

Рассмотрим левую часть уравнения (21), определенную по (9). Учитывая граничные условия для температуры (7), представим ϑ в виде полинома 2-й степени, удовлетворяющего этим условиям:

$$\vartheta = \frac{(\Delta - \xi)^2}{(\Delta - 1)^2}. \quad (39)$$

В этом случае (9) можно записать в виде:

$$\chi = \frac{1}{(\Delta-1)^2}\int\limits_1^\Delta \xi(\Delta - \xi)^2\cdot m_к(\xi)\,d\xi; \quad (40)$$

или же в частных случаях (с учетом (10) — (12):

а) вынужденной конвекции:

$$\chi_{КВ} = \frac{1}{(\Delta-1)^2}\int\limits_1^\Delta \xi(\Delta - \xi)^2\cdot\varphi_2(\xi)d\xi; \quad (41)$$

б) естественной конвекции

$$\chi_{КЕ} = \frac{1}{(\Delta-1)^2}\int\limits_1^\Delta \xi(\Delta - \xi)^2\cdot\psi_2(\xi)d\xi; \quad (42)$$

в) смешанной конвекции

$$\chi_{\text{кс}} = \frac{1}{(\Delta-1)^2}\int_1^\Delta \xi(\Delta-\xi)^2\left[\varphi_2(\xi) \pm \frac{Gr}{Re}\psi_2(\xi)\right]d\xi =$$

$$= \frac{1}{(\Delta-1)^2}\int_1^\Delta \xi(\Delta-\xi)^2\varphi_2(\xi)\,d\xi \pm \frac{Gr}{Re}\frac{1}{(\Delta-1)^2}\int_1^\Delta \xi(\Delta-\xi)^2\psi_2(\xi)\,d\xi = \chi_{\text{кв}} \pm$$

$$\pm \frac{Gr}{Re}\chi_{\text{кЕ}}. \tag{43}$$

Очевидно, интегралы, входящие в (41)—(43), легко вычисляются.

В общем виде, с учетом (40) и (21), можно записать:

$$\frac{1}{(\Delta-1)^2}\int_1^\Delta \xi(\Delta-\xi)^2\cdot\omega_{\text{к}}(\xi)\,d\xi = -\frac{1}{2Pr\cdot K_1}\left(\frac{d\vartheta_\pi}{d\xi}\right)_{\xi=1}\cdot\left(1-\lambda_0+\frac{1+\lambda_0}{\sin^2\frac{\Theta}{2}}\right) \tag{44}$$

Полученное трансцендентное уравнение позволяет для любого режима определить зависимость толщины области теплового влияния от координаты Θ:

$$\Delta = \Delta(\Theta). \tag{45}$$

Полезно, кроме того, отметить, что в общем случае

$$\lim_{\Delta\to 1}\chi(\Delta) = 0 \text{ и } \lim_{\Delta\to 1}\frac{d\chi}{d\Delta} = 0, \tag{46}$$

а также, что $\chi(\Delta)$ увеличивается с ростом Δ по параболической зависимости. Это позволяет с достаточной степенью точности аппроксимировать функцию $\chi(\Delta = \rho + 1)$ выражением:

$$\chi = \frac{1}{(\Delta-1)^2}\int_1^\Delta \xi(\Delta-\xi)^2\cdot\omega_{\text{к}}(\xi)\,d\xi \approx a\cdot\rho^p, \tag{47}$$

где $\rho = \Delta - 1$, а a и p — величины, подбираемые из условия наилучшего приближения аппроксимирующей функции к аппроксимируемой. В этом случае можно записать вместо (44)

$$\rho = \left[-\frac{1}{2aPrK_1}\left(\frac{d\vartheta_\pi}{d\xi}\right)_{\xi=1}\cdot\left(1-\lambda_0+\frac{1+\lambda_0}{\sin^2\frac{\Theta}{2}}\right)\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{48}$$

Для определения безразмерного коэффициента теплообмена, осредненного по поверхности сферической частицы, воспользуемся известным соотношением Л. И. Кудряшева, которое в данном случае можно записать в виде:

$$\overline{Nu} = 2 + \left(\overline{\frac{2}{\rho}}\right). \tag{49}$$

Здесь

$$\left(\overline{\frac{2}{\rho}}\right) = \frac{\int_0^\pi \frac{2}{\rho}\sin\Theta\,d\Theta}{\int_0^\pi \sin\Theta\,d\Theta} = \int_0^\pi \frac{1}{\rho}\sin\Theta\,d\Theta.$$

Подставляя в это соотношение значение ρ по (48) и учитывая (49), получим:

$$\bar{N}u = 2 + \left[-\frac{2a \cdot Pr \cdot K_1}{\left(\frac{d\vartheta_n}{d\xi}\right)_{\xi=1}} \right]^{\frac{1}{p}} \cdot \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\Theta \, d\Theta}{\left(1 - \lambda_0 + \frac{1 + \lambda_0}{\sin^2 \frac{\Theta}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}}. \tag{50}$$

Полученная формула дает возможность определить значение осредненного по поверхности частицы коэффициента теплообмена в случае вынужденной, естественной или смешанной конвекции.