КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
ТРУДЫ. ВЫПУСК XXIV, 1966 г.
Вопросы механики жидкостей и газов

Л. И. КУДРЯШЕВ, А. А. ГУСАКОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛООБМЕНА НАГРЕТОЙ ЖИДКОЙ ЧАСТИЦЫ В УСЛОВИЯХ ВИТАНИЯ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Предположим, что нагретая до постоянной температуры T_w сферическая жидкая тяжелая частица радиуса R, плотности ρ' и вязкости μ' помещена в сплошную вязкую среду постоянной температуры T_∞, плотности $\rho < \rho'$ и вязкости μ*. При увеличении перепада температур $T_w - T_\infty$ пропорциональное этому перепаду сопротивление неограниченно уменьшает скорость падения частицы.

Целью настоящей работы является приближенное определение коэффициента теплообмена частицы при условии ее полного температурного торможения в среде. Предполагается температурная стационарность процесса.

Задача рассматривается в сферической осесимметричной безразмерной системе координат с началом, совмещенным с центром тяжести частицы.

Введем следующие обозначения безразмерных величин (величины, относящиеся к внутренней среде (частице) обозначаются теми же символами, что и соответствующие величины для внешней среды, но со штрихами):

$\xi = \frac{r}{R}$ $(0 \leqslant \xi < \infty)$; Θ, $(0 \leqslant \Theta \leqslant \pi)$ — сферические координаты;

$$v_\xi = \frac{v_r}{\sqrt{2g\beta R(T_w - T_\infty)}};\quad v_\Theta = \frac{v_\Theta}{\sqrt{2g\beta R(T_w - T_\infty)}};\quad v'_\xi = \frac{v'_r}{\sqrt{2g\beta R(T_w - T_\infty)}};$$

$v'_\Theta = \frac{v'_\Theta}{\sqrt{2g\beta R(T_w - T_\infty)}}$ — сферические проекции скорости в произвольной точке (g — ускорение земного тяготения; β — коэффициент объемного расширения внешней среды);

* Предполагая малую неизотермичность — плотность, вязкость и теплофизические характеристики внешней среды определяем по средней температуре $\frac{T_w + T_\infty}{2}$

$\vartheta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}$; $\vartheta' = 1$ — приведенная температура в данной точке;

$\pi = \frac{P}{\rho \cdot 2g\beta R\,(T_w - T_\infty)}$; $\pi' = \frac{P'}{\rho' 2g\beta R\,(T_w - T_\infty)}$ — давление в данной точке;

$$\pi_{\xi\xi} = \frac{P_{rr}}{\rho \cdot 2g\beta R(T_w - T_\infty)};\quad \pi_{\xi\Theta} = \frac{P_{r\Theta}}{\rho \cdot 2g\beta R(T_w - T_\infty)};\quad \pi'_{\xi\xi} = \frac{P'_{rr}}{\rho' \cdot 2g\beta R\,(T_w - T_\infty)};$$

$\pi'_{\xi\Theta} = \frac{P'_{r\Theta}}{\rho' \cdot 2g\beta R(T_w - T_\infty)}$ — нормальные и касательные компоненты тензора напряжений;

$$Pr = \frac{\nu}{a};\quad Gr = \frac{(2R)^3\beta g\,(T_w - T_\infty)}{\nu^2};\quad Gr' = \frac{(2R)^3\beta g(T_w - T_\infty)}{\nu'^2};$$

$Nu = \frac{2R\cdot\alpha}{\lambda}$ — критерии Прандтля, Грасгофа и Нуссельта.

Вследствие предполагаемой малости размера частицы и небольшого перепада температур считаем числа Gr и Gr' достаточно малыми, чтобы было обеспечено безинерционное естественное движение среды, обтекающей нагретую частицу. В этом случае система дифференциальных уравнений, описывающих движение и теплообмен, может быть записана в виде:

а) для внешней среды ($1 \leqslant \xi < \infty$)

$$\frac{\partial \pi}{\partial \xi} = \frac{2}{Gr^{1/2}}\left(\frac{\partial^2 v_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^2 v_\xi}{\partial \Theta^2} + \frac{2}{\xi}\frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \frac{\operatorname{ctg}\Theta}{\xi^2}\frac{\partial v_\xi}{\partial \Theta} - \frac{2}{\xi^2}\frac{\partial v_\Theta}{\partial \Theta} - \frac{2v_\xi}{\xi^2} - \frac{2\operatorname{ctg}\Theta}{\xi^2}v_\Theta\right) + \frac{1}{2}\vartheta\cdot\cos\Theta; \tag{1}$$

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial \pi}{\partial \Theta} = \frac{2}{Gr^{1/2}}\left(\frac{\partial^2 v_\Theta}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^2 v_\Theta}{\partial \Theta^2} + \frac{2}{\xi}\frac{\partial v_\Theta}{\partial \xi} + \frac{\operatorname{ctg}\Theta}{\xi^2}\frac{\partial v_\Theta}{\partial \Theta} + \frac{2}{\xi^2}\frac{\partial v_\xi}{\partial \Theta} - \frac{v_\Theta}{\xi^2\sin^2\Theta}\right) - \frac{1}{2}\vartheta\sin\Theta; \tag{2}$$

$$\frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial v_\Theta}{\partial \Theta} + \frac{2v_\xi}{\xi} + \frac{v_\Theta\operatorname{ctg}\Theta}{\xi} = 0; \tag{3}$$

$$v_\xi\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} + \frac{v_\Theta}{\xi}\frac{\partial \vartheta}{\partial \Theta} = \frac{2}{Pr\,Gr^{1/2}}\left[\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi^2\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}\right)\right]; \tag{4}$$

б) для внутренней среды ($0 \leqslant \xi \leqslant 1$)

$$\frac{\partial \pi'}{\partial \xi} = \frac{2}{Gr'^{1/2}}\left(\frac{\partial^2 v'_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^2 v'_\xi}{\partial \Theta^2} + \frac{2}{\xi^2}\frac{\partial v'_\xi}{\partial \xi} + \frac{\operatorname{ctg}\Theta}{\xi^2}\frac{\partial v'_\xi}{\partial \Theta} - \frac{2}{\xi^2}\frac{\partial v'_\Theta}{\partial \Theta} - \frac{2v'_\xi}{\xi^2} - \frac{2\operatorname{ctg}\Theta}{\xi^2}v'_\Theta\right); \tag{5}$$

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial \pi'}{\partial \Theta} = \frac{2}{Gr'^{1/2}}\left(\frac{\partial^2 v'_\Theta}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^2 v'_\Theta}{\partial \Theta^2} + \frac{2}{\xi}\frac{\partial v'_\Theta}{\partial \xi} + \frac{\operatorname{ctg}\Theta}{\xi^2}\frac{\partial v'_\Theta}{\partial \Theta} + \frac{2}{\xi^2}\frac{\partial v'_\xi}{\partial \Theta} - \frac{v'_\Theta}{\xi^2\sin^2\Theta}\right); \tag{6}$$

$$\frac{\partial v'_\xi}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial v'_\Theta}{\partial \Theta} + \frac{2v'_\xi}{\xi} + \frac{v'_\Theta \operatorname{ctg}\Theta}{\xi} = 0; \tag{7}$$

$$\vartheta' = 1. \tag{8}$$

Граничные условия:

1) при $\xi \to \infty$ $\quad v_\xi = 0, \quad v_\Theta = 0; \quad \vartheta = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = 0;$ (9)

2) при $\xi = 1$ $\quad v_\xi = v'_\xi = 0$ вследствие отсутствия радиальной пульсации; (10)

$v_\Theta = v'_\Theta$ вследствие отсутствия скольжения.

$$\vartheta = \vartheta' = 1 \tag{11}$$

3) при $\xi = 0$ $\quad v'_\xi$ и v'_Θ — конечные. (12)

При предположении о постоянстве температуры по объему жидкой частицы внутренняя задача принципиально не отличается от соответствующей известной задачи Рибчинского — Адамара. Иначе говоря, решение системы (5) — (8) при выполнении условия (12) и первого из условий (10) представится в виде:

$$\begin{aligned} v'_\xi &= c(1-\xi^2)\cdot\cos\Theta; \\ v'_\Theta &= -c(1-2\xi^2)\sin\Theta; \\ \pi' &= -\frac{20c}{(Gr')^{1/2}}\,\xi\cos\Theta; \\ \vartheta' &= 1. \end{aligned} \tag{13}$$

Определение поля скоростей и давлений во внешней среде ($1 \leqslant \xi < \infty$) можно осуществить предложенным авторами приближенным методом*, основанным на предварительном искусственном выделении из системы (1)—(4) „гидродинамической" системы (1)—(3) с последующим ее интегрированием. При этом в нашем случае:

$$v_\xi = c\left(\frac{1}{\xi^3} - \frac{1}{\xi}\right)\cos\Theta + Gr^{1/2}\left(\frac{0,679}{\xi} - \frac{0,928}{\xi^{1,445}} + \frac{0,428}{\xi^{2,802}} - \frac{0,179}{\xi^3}\right)\cos\Theta; \tag{14}$$

$$v_\Theta = \frac{c}{2}\left(\frac{1}{\xi^3} + \frac{1}{\xi}\right)\sin\Theta - Gr^{1/2}\left(\frac{0,339}{\xi} - \frac{0,257}{\xi^{1,445}} - \frac{0,172}{\xi^{2,802}} - \frac{0,090}{\xi^3}\right)\sin\Theta; \tag{15}$$

$$\pi = -\frac{2c}{Gr^{1/2}}\frac{1}{\xi^2}\cos\Theta + \left(\frac{1,359}{\xi^2} - \frac{2,068}{\xi^{2,445}} + \frac{0,238}{\xi^{3,802}}\right)\cos\Theta. \tag{16}$$

Для определения постоянной величины c, входящей в формулы (13)—(16), воспользуемся условиями равенства касательных напряжений $P_{\Theta r}$ $P'_{r\Theta}$ на поверхности раздела сред. Это условие в безразмерной форме может быть записано в виде:

$$\frac{\mu}{\mu'}\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial v_\xi}{\partial\Theta} + \frac{\partial v_\Theta}{\partial\xi} - \frac{v_\Theta}{\xi}\right) = \frac{1}{\xi}\frac{\partial v'_\xi}{\partial\Theta} + \frac{\partial v'_\Theta}{\partial\xi} - \frac{v'_\Theta}{\xi}, \quad \text{при } \xi = 1. \tag{17}$$

* См. статью Л. И. Кудряшева, А. А. Гусакова. «Влияние свободной конвекции на поле скоростей и давлений при обтекании сферы потоком при малых числах Рейнольдса». Настоящий сборник, стр. 39.

При выполнении условия (17) получим:

$$c = -0{,}083 \cdot q\left(\frac{\mu}{\mu'}\right) \cdot Gr, \tag{18}$$

где

$$q\left(\frac{\mu}{\mu'}\right) = \frac{\frac{2\mu}{\mu'}}{1 + \frac{\mu}{\mu'}}. \tag{19}$$

С учетом (18) поле скоростей и давлений во внешней среде определится следующим образом:

$$v_r = Gr^{1/2}\left(\frac{0{,}679 + 0{,}083q}{\xi} - \frac{0{,}928}{\xi^{1,445}} + \frac{0{,}428}{\xi^{2,802}} - \frac{0{,}179 - 0{,}083q}{\xi^3}\right)\cos\Theta, \tag{20}$$

$$v_\Theta = -Gr^{1/2}\left(\frac{0{,}339 + 0{,}0415q}{\xi} - \frac{0{,}257}{\xi^{1,445}} + \frac{0{,}172}{\xi^{2,802}} - \frac{0{,}090 - 0{,}0415q}{\xi^3}\right)\sin\Theta; \tag{21}$$

$$\pi = \left(\frac{1{,}359 - 0{,}166q}{\xi^2} - \frac{2{,}063}{\xi^{2,445}} + \frac{0{,}238}{\xi^{3,802}}\right)\cos\Theta. \tag{22}$$

Обозначая через $c_w = \frac{W}{\pi R^2 \rho g \beta R (T_w - T_\infty)}$ коэффициент сопротивления частицы, определим его по известной формуле:

$$c_w = 4\int_0^\pi (\tau_{r\xi}\cos\Theta - \tau_{\xi\Theta}\sin\Theta)\sin\Theta\, d\Theta, \quad \text{при } \xi = 1. \tag{23}$$

В этом случае

$$c_w = 4\left(1 - \frac{q}{3}\right), \tag{24}$$

или же:

$$W = \frac{\pi\rho\nu^2}{2}\left(1 - \frac{q}{3}\right) \cdot Gr. \tag{25}$$

Предполагая, что на частицу действует сила тяжести и приравнивая ее к сопротивлению, определенному по (25), получим условие витания частицы в виде:

$$Gr = \frac{(2R)^3 g}{\nu^2}\,\frac{\rho' - \rho}{\rho}\,\frac{1}{3 - q} = \frac{(2R)^3 g}{\nu^2}\,\frac{\rho' - \rho}{\rho}\,\frac{\mu' + \mu}{3\mu' + 2\mu}; \tag{26}$$

или

$$\beta(T_w - T_\infty) = \frac{\rho' - \rho}{\rho}\,\frac{\mu' + \mu}{5\mu' + 2\mu}. \tag{27}$$

При определенном поле скоростей (20)–(21) решение задачи об определении коэффициента теплоотдачи принципиально не отличается от решения соответствующей задачи для твердой сферической частицы* с использованием интегрального соотношения в

* См. статью Л. И. Кудряшева, А. А. Гусакова. «Приближенный метод определения теплоотдачи от сферической частицы малого радиуса». Настоящий сборник, стр. 172.

области теплового влияния. Задача сводится к определению безразмерной толщины области влияния $\rho = \Delta - 1$ из уравнения:

$$\frac{1}{(\Delta-1)^2}\int_1^{\Delta}\xi(\Delta-\xi)^2\varphi_2(\xi,q)\,d\xi = -\frac{1}{2Pr\cdot Gr}\left(\frac{d\theta_s}{d\xi}\right)_{\xi=1}\left(1-\lambda_0+\frac{1+\lambda_0}{\sin^2\frac{\Theta}{2}}\right), \tag{28}$$

где

$$\varphi_2(\xi,q) = \frac{0,339-0,0415q}{\xi} - \frac{0,257}{\xi^{1,445}} - \frac{0,172}{\xi^{2,802}} + \frac{0,090+0,0415q}{\xi^3}; \tag{29}$$

$$\left(\frac{d\theta_s}{d\xi}\right)_{\xi=1} = -\frac{\exp(-A)_{\xi=1}}{\int_1^{\infty}\frac{1}{\xi^2}\exp(-A)\,d\xi}; \quad \lambda_0 = \exp(2A)_{\xi=1}\frac{\int_1^{\infty}\frac{1}{\xi^2}\exp(-A)\,d\xi}{\int_1^{\infty}\frac{1}{\xi^2}\exp(+A)\,d\xi}; \tag{30}$$

$$A = \frac{PrGr}{2}\left[(0,679+0,083q)\ln\xi + \frac{2,085}{\xi^{0,445}} - \frac{0,238}{\xi^{1,802}} + \frac{0,090+0,0415q}{\xi^2}\right]. \tag{31}$$

С учетом (29), после интегрирования уравнение (28) можно представить в виде трансцендентного уравнения:

$$\frac{(0,113+0,0135q)\Delta^3-0,234\Delta^{2,555}+1,808\Delta^{1,198}-(0,180+0,0813q)\Delta\ln\Delta-(1,729-0,0406q)\Delta+(0,042-0,0541q)}{(\Delta-1)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2Pr\cdot Gr}\left(\frac{d\theta_s}{d\xi}\right)_{\xi=1}\left(1-\lambda_0+\frac{1+\lambda_0}{\sin^2\frac{\Theta}{2}}\right). \tag{32}$$

Его решение, зависящее от двух параметров $PrGr$ и q

$$\Delta = \Delta(\Theta,\ PrGr,\ q)$$

целесообразно представить в виде

$$\rho = \rho(\Theta,\ PrGr,\ q), \tag{33}$$

где $\rho = \Delta - 1$.

Определяя далее осредненное по поверхности частицы значение

$$\left(\overline{\frac{2}{\rho}}\right) = \frac{\int_0^{\pi}\frac{2}{\rho}\sin\Theta\,d\Theta}{\int_0^{\pi}\sin\Theta\,d\Theta} = \int_0^{\pi}\frac{1}{\rho}\sin\Theta\,d\Theta,$$

так же осредненное значение безразмерного коэффициента теплообмена получим, используя соотношение Л. Н. Кудряшева, в виде:

$$\overline{Nu} = 2 + \int_0^{\pi}\frac{\sin\Theta\,d\Theta}{\rho(\Theta,\ PrGr,\ q)}. \tag{34}$$

Решение трансцендентного уравнения (32) и последующее вычисление интеграла, входящего в (34), проводится с помощью электронно-вычислительной машины.