

А. Ф. БОЧКАРЕВ, Л. И. ЖЕМКОВ, Л. И. КУДРЯШЕВ

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ПРОЦЕССОВ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕПЛООБМЕНА В СИСТЕМАХ С ПЕРЕМЕННЫМИ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Задача расчета нестационарного теплообмена, постоянно выдвигаемая в различных областях техники, все чаще приводит исследователя к необходимости анализа систем нелинейных дифференциальных уравнений. К сожалению, в настоящее время невозможно пока получить общее решение таких задач. Число решенных задач даже для частных случаев сравнительно невелико. Это например известные работы А. Н. Тихонова [1], М. Шторма [2], Л. Больцмана [3], которые, однако, не затрагивают полностью всей проблемы.

В последнее время получили значительное развитие методы решения нелинейных задач теплообмена, в которых теоретические исследования сочетаются с электромоделированием [4], [5], [6], [7].

В данной работе ставится задача оценки влияния нелинейности граничного условия на стабилизацию нестационарного теплообмена. В диссертационной работе автора [8] экспериментально была подтверждена теоретически предсказанная особенность процесса — физическая линеаризация граничного условия, в результате которой сглаживается нелинейность задачи. Этот вопрос был исследован достаточно подробно, но до сих пор другие работы в данном направлении отсутствуют.

Излагасмые ниже результаты, полученные независимо от [8], приводят к качественно одинаковым закономерностям.

Рассмотрим задачу нестационарной теплопроводности:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_p \gamma \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} \vartheta), \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = 0 \quad \vartheta = \vartheta_0(x, y, z). \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda_w \left(\frac{\partial \lambda}{\partial n} \right)_w = \alpha \cdot \vartheta_w, \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \lambda(\vartheta), \quad c_p = c_p(\vartheta). \end{array} \right. \quad (4)$$

Здесь: $\vartheta = T - T_f$ — избыточная температура тела над температурой окружающей среды.

Вводя функцию Кирхгофа:

$$\Phi = \int_0^{\vartheta} \lambda(\vartheta) d\vartheta + \Phi_0, \quad (5)$$

приводим исходную систему уравнений к виду:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Theta}{\partial F_0^*} = A(\Theta) \nabla^2 \Theta, \\ F_0^* = 0, \quad \Theta = \Theta_0(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \\ - \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \xi_i} \right)_{\omega} = Bi_{i0} \cdot \xi_{i\omega} \cdot \Theta_{\omega}, \\ A(\Theta) = 1 + k \cdot \Theta, \end{cases} \quad (6)$$

$$\Theta = \frac{\Phi - \Phi_0}{\Phi_m - \Phi_0}, \quad (7)$$

где Φ_m — максимальное значение в задаче, соответствующее максимальной температуре T_m .

$$K = \frac{2\lambda_1}{\lambda_0^2} (\Phi_m - \Phi_0) = \text{const}; \quad (8)$$

K — «коэффициент нелинейности», многократно применявшийся в работах [4], [5], [6], [7];

λ_1 и λ_0 — коэффициенты в зависимости:

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \vartheta. \quad (9)$$

Далее:

$$Bi_{i0} = \frac{\alpha \cdot l}{\lambda_0}, \quad (10)$$

$$\xi_{i\omega} = \frac{\alpha_{i\omega}}{\Phi_{\omega} \cdot \Phi_{i0}}, \quad (11)$$

где l — характерный размер тела;

$\alpha_{i\omega}$ — функция, содержащаяся в переменном критерии Био.

С учетом (5), (9) и (11) можно получить:

$$\xi_{i\omega} = \frac{1}{\lambda_0 \left(1 + \frac{\lambda_1}{2\lambda_0} \Theta_m \right)}. \quad (12)$$

Таблица 1

Θ_{ω}	K'				
	-0,1	-0,2	-0,3	0,4	-0,5
0	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500
0,2	0,503	0,505	0,508	0,510	0,513
0,4	0,505	0,510	0,516	0,522	0,528
0,6	0,508	0,516	0,525	0,531	0,544
0,8	0,510	0,522	0,534	0,548	0,563
1,0	0,513	0,528	0,544	0,563	0,586

или, через безразмерную функцию Кирхгофа:

$$\bar{\zeta}_w = \frac{2}{\lambda_0} \beta' = \frac{2}{\lambda_0} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{1 + k \cdot \Theta_w}} \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что величина β' изменяется сравнительно слабо при практических значениях коэффициента $K = 0,1 \div 0,5$ (см. табл. 1). Учитывая, что β' изменяется почти линейно в функции Θ_w , заменим β' средним значением:

$$\bar{\beta}' \approx \frac{3 + \sqrt{1 + K}}{2(1 + \sqrt{1 + K})} \quad (14)$$

В итоге граничное условие в системе (6) линеаризовано, так как

$$Bi^* = Bi_0 \cdot \bar{\zeta}_w \approx Bi_0 \cdot \bar{\beta}' \approx Bi_0 \cdot \frac{1}{\lambda_0} \frac{3 + \sqrt{1 + K}}{2(1 + \sqrt{1 + K})} \quad (15)$$

Перейдем теперь к рассмотрению конкретного случая — нестационарного теплообмена шара:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial F_{00}} = A(\Theta) \cdot \frac{1}{r_1^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r_1} \left[r_1^2 \frac{\partial \Theta}{\partial r_1} \right] \quad (16)$$

$$F_{00} \quad \Theta_0 = 1, \quad (17)$$

$$-\left(\frac{\partial \Theta}{\partial r_1} \right)_{r_1=1} = Bi_0 \bar{\zeta}_w \cdot \Theta / r_{1-1} \quad (18)$$

Перейдем от уравнения (16) к интегральному соотношению:

$$\frac{\partial}{\partial F_{00}} \int_0^1 \Theta r_1^2 dr_1 = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial r_1} \right)_{r_1=1}, \quad (19)$$

где $\frac{1}{A(\Theta)}$ приближенно заменяется величиной:

$$\beta = \int_0^1 [1 - K\Theta + (K\Theta)^2 - (K\Theta)^3 + \dots] d\Theta = 1 - \frac{K}{2} + \frac{K^2}{3} - \frac{K^3}{4} + \dots \quad (20)$$

В итоге величина β в интегральном соотношении — константа.

Ищем приближенное решение для Θ в виде произведения:

$$\Theta = A(1 - Br_1^2), \quad (21)$$

где A — функция F_{00} .

Используя граничное условие (15), получим:

$$B = \frac{Bi_0 \cdot \bar{\zeta}_w}{2 + Bi_0 \bar{\zeta}_w} \quad (22)$$

Подставив (21) в (19), после интегрирования имеем:

$$A = A_0 \cdot \exp \left[- \frac{2B}{\beta \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}B \right)} F_{00} \right] \quad (23)$$

Коэффициент A_0 находим из условия существования минимума функционала:

$$\delta \int_0^1 [1 - A_0 (1 - Br_1^2)]^2 r_1^2 dr_1 = 0. \quad (24)$$

Откуда:

$$A_0 = \frac{\int_0^1 (1 - Br_1^2) r_1^2 dr_1}{\int_0^1 (1 - Br_1^2)^2 r_1^2 dr_1} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{B}{5}}{\frac{1}{3} - \frac{2}{5}B + \frac{1}{7}B^2}. \quad (25)$$

В итоге приходим к следующему приближенному решению:

$$\Theta = \frac{\frac{1}{3} - \frac{B}{5}}{\frac{1}{3} - \frac{2}{5}B + \frac{1}{7}B^2} \cdot \exp \left[- \frac{2B}{\beta \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}B \right)} F_0 \right] \cdot (1 - Br_1^2). \quad (26)$$

Из соотношения (26) следует наличие регулярного режима для функции Θ :

$$-\frac{1}{\Theta} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial F_0} = \frac{2B}{\beta \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}B \right)} = \text{const}. \quad (27)$$

В случае $Bi_0 \rightarrow \infty$ получим $B = 1,0$ и (26) обратится в простое выражение:

$$\Theta = \frac{7}{4} \cdot e^{-\frac{15}{4} F_0} \cdot (1 - r_1^2), \quad (28)$$

отличающееся от результата, полученного Л. С. Лейбензоном [9], наличием величины β :

$$\Theta = \frac{7}{4} \cdot e^{-15 F_0} \cdot (1 - r_1^2) \text{ -- результат Л. С. Лейбенса.} \quad (29)$$

При постоянных теплофизических характеристиках (28) и (29) совпадают, т. к. $\beta = 1,0$.

Следует отметить, что полученное приближенное решение (26) дает удовлетворительный результат лишь при больших значениях F_0 , поэтому будем теперь искать решение в виде:

$$\Theta = A \cdot \frac{\sin(nr_1)}{nr_1}. \quad (30)$$

Величины корней n определяются из характеристического уравнения:

$$-n \operatorname{ctg} n = \sqrt{\omega} Bi_0 - 1. \quad (31)$$

Имея бесчисленное множество корней n_1, n_2, \dots, n_k , строим решение (19) в виде:

$$\Theta = \sum_{k=1}^{\infty} A_{0,k} \exp \left(- \frac{n_k^2}{\beta} F_0 \right) \cdot \frac{\sin(n_k \cdot r_1)}{n_k \cdot r_1} \quad (32)$$

Коэффициенты $A_{n,k}$ находятся из условия минимума функционала:

$$\delta \int_0^1 \left[1 - \sum_{k=1}^{\infty} A_{0,k} \frac{\sin(n_k r_1)}{n_k r_1} \right]^2 r_1^2 dr_1. \quad (33)$$

Отсюда:

$$A_{0,k} = \frac{\int_0^1 \frac{\sin(n_k r_1)}{n_k r_1} r_1^2 dr_1}{\int_0^1 \left[\frac{\sin(n_k r_1)}{n_k r_1} \right]^2 r_1^2 dr_1} = 2 \cdot \frac{\sin n_k - n_k \cdot \cos n_k}{n_k - \sin n_k \cdot \cos n_k}. \quad (34)$$

В итоге получим решение (19) в виде:

$$\Theta = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin n_k - n_k \cdot \cos n_k}{n_k - \sin n_k \cdot \cos n_k} e^{-\frac{n_k^2}{3} F_0} \cdot \frac{\sin(n_k r_1)}{n_k r_1}. \quad (35)$$

Поскольку величины $\frac{n_k}{3}$ расположены в следующей последовательности:

$$\frac{n_1}{3} < \frac{n_2}{3} < \frac{n_3}{3} < \dots, \quad (36)$$

то ряд (35) будет сходящимся и в итоге можно ожидать, что со временем он сведется практически к первому члену ряда, т. е. получим регулярный режим для Θ по F_0 :

$$-\frac{1}{\Theta} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial F_0} = \frac{n_1^2}{3} = \text{const}. \quad (37)$$

Интересно сравнить два полученных результата (26) и (35) с приближенным решением той же задачи для температуры, полученным в работе [4]:

$$t = \frac{T - T_f}{T_m - T_f} = \sqrt{\frac{1 + 2k \frac{\sin n_1 - n_1 \cos n_1}{n_1 - \sin n_1 \cos n_1} \cdot e^{-\frac{n_1^2}{3} F_0} \cdot \frac{\sin(n_1 r_1)}{n_1 r_1} - 1}{k + 1 - k - 1}}. \quad (38)$$

Из (38) следует, что приближение к регулярному режиму для избыточной температуры наступает лишь при больших значениях F_0 , т. е. когда уже наступила стабилизация теплообмена и теплофизические характеристики тела, приближающегося к тепловому равновесию с окружающей средой, уже слабо изменяются (пологая часть кривой охлаждения).

В общем же случае:

$$\frac{1}{t} \cdot \frac{\partial t}{\partial F_0} \neq \text{const}. \quad (39)$$

Наступление регулярного режима по функции Кирхгофа происходило всегда раньше регуляризации по температуре. Этот результат подробно освещен в [8].

Рассмотрим теперь моделирование процессов нестационарной теплопроводности. Эта работа была проведена для наглядного представления процессов, исследованных теоретически, и для проверки.

Моделирование нелинейных задач проводилось на электронной модели ИИТ-5. Для простоты моделирования в качестве примера выбран случай симметричного охлаждения плоской бесконечной стенки. Выбор одномерной задачи определен схемой модели ИИТ-5. Теплофизические характеристики материала были выбраны следующими:

$$\lambda = \lambda_0(1 + at) \left[\frac{\text{дж}}{\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{с} \cdot \text{С}} \right], \quad \lambda_0 = 100,0, \quad a = 0,01 \left[\frac{1}{\text{с} \cdot \text{С}} \right];$$

$$c = c_0(1 + bt) \left[\frac{\text{дж}}{\text{кг} \cdot \text{С}} \right], \quad c_0 = 0,1, \quad b = 0,02 \left[\frac{1}{\text{С}} \right];$$

$$\gamma = 10\,000 \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}} \right];$$

$\delta = 0,1 \text{ м}$ - полутолщина пластины.

Как видно, теплофизические характеристики не были связаны дополнительными условиями типа условий Штурма. Исходная система уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_p \gamma \frac{\partial t}{\partial z} = \text{div} (\lambda \cdot \text{grad } t), \\ -\lambda_{0a} \left(\frac{\partial t}{\partial z} \right)_w = z \cdot \Delta t, \\ \tau = 0 \quad t = t_0 = \text{const.} \\ \lambda = \lambda(t); \quad c = c(t), \end{array} \right. \quad (40)$$

преобразуется на основе функции Кирхгофа:

$$\Phi = \int_0^t \lambda(t) dt = \lambda_0 \left(t + \frac{a}{2} t^2 \right). \quad (41)$$

Отсюда имеем:

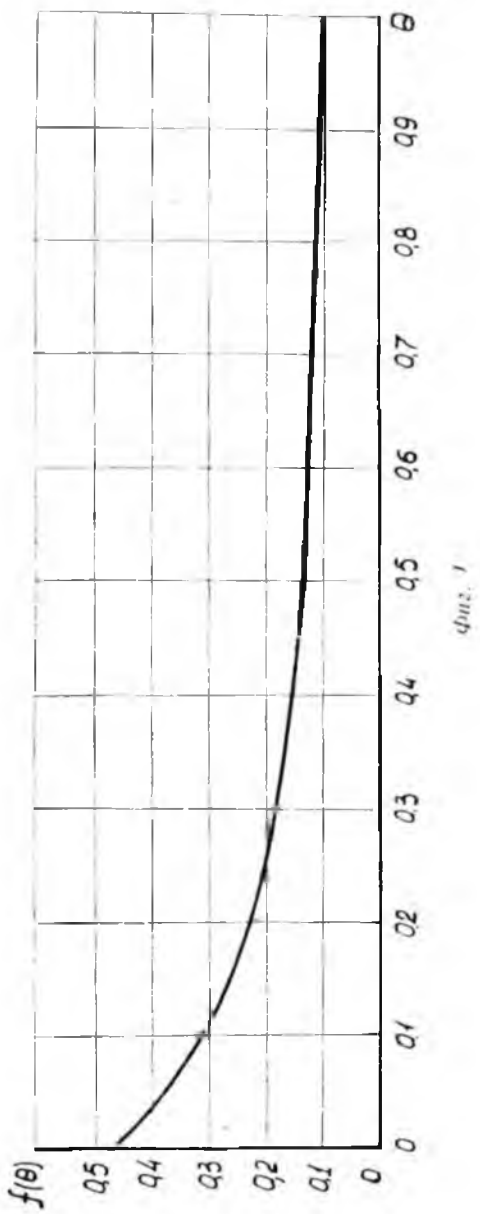
$$t = -\frac{1}{a} + \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{2\Phi}{a\lambda_0}} = \frac{1}{a} \left(\sqrt{1 + \frac{2a\Phi}{\lambda_0}} - 1 \right). \quad (42)$$

Вводя безразмерную функцию Кирхгофа $\Theta = \frac{\Phi}{\Phi_0}$, можно записать:

$$t = \frac{1}{a} \left(\sqrt{1 + \frac{2\Phi_0}{\lambda_0} \Theta} - 1 \right). \quad (43)$$

Преобразованная система уравнений получит вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{a_0}{l^2} \cdot \frac{1 - bt}{1 + bt} \nabla^2 \Theta, \\ -\frac{\partial \Theta}{\partial z} = Bi \cdot \Theta, \\ \tau = 0, \quad \Theta = 1. \end{array} \right. \quad (44)$$



Или

$$\text{Здесь } \begin{cases} \frac{\partial \Theta}{\partial F_{01}} = f(\Theta) \nabla^2 \Theta \\ - \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z_{0w}} \right) = Bi^* \cdot \Theta_w \\ F_0 = 0 \quad \Theta = 1. \\ F_{00} = \frac{a_0 \tau}{l^2}, \\ z = \frac{x}{l}. \end{cases} \quad (45)$$

Функция $f(\Theta)$ имеет вид:

$$f(\Theta) = \frac{1}{2 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2a\Phi_w}{\lambda_a} \Theta}}}}, \quad (46)$$

и в данном конкретном случае

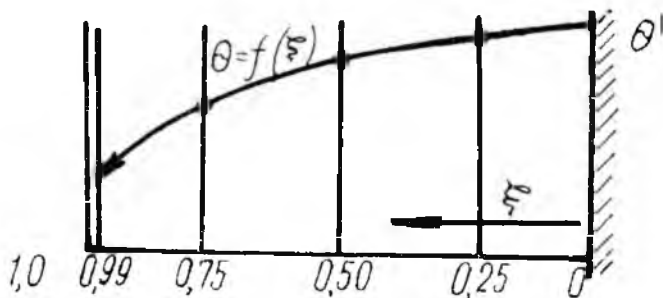
$$f(\Theta) = \frac{1}{2 - \frac{1}{\sqrt{1 + 8\Theta}}}}. \quad (47)$$

График функции приведен на фиг. 1.

После исходных преобразований задача решалась в двух вариантах. В первом варианте использована гипотеза об автолинеаризации граничного условия, о которой говорилось ранее. При решении задачи по этому варианту принимается $Bi^* = \text{const}$.

Задача решалась при: $Bi^* = 2,5; 5,0; 10$.

Схема разбиения стенки по слоям изображена на фиг. 2. В соответствии с системой уравнений, к которой свелась задача, была составлена блок-схема моделирования процесса теплообмена.



Фиг. 2.

Система уравнений имеет вид:

$$\frac{du_1}{d\tau} = \frac{1}{100} f(u_1)(-1,0417u_1 + 1,041u_2 - 0,25Bi^*u_0). \quad (48)$$

$$\frac{du_2}{d\tau} = \frac{1}{100} f(u_2)(+0,5u_0 - u_2 + 0,5u_3). \quad (49)$$

$$\frac{du_3}{d\tau} = \frac{1}{100} f(u_3)(0,5u_2 - u_3 + 0,5u_4). \quad (50)$$

$$\frac{du_4}{d\tau} = \frac{1}{100} f(u_4)(0,5u_3 - u_4 + 0,5u_5). \quad (51)$$

$$\frac{du_5}{d\tau} = \frac{1}{100} f(u_5)(u_4 - u_5), \quad (52)$$

$$\text{при } \tau = 0, u_i = 100,0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5), \quad (53)$$

$$f(u_i) = 100f(\Theta_i); F_0 = \frac{1}{32} \tau. \quad (53)$$

Второй вариант задачи решался без учета явления линеаризации граничного условия.

При этом граничное условие является нелинейным:

$$-\frac{\partial \Theta_w}{\partial \xi} = Bi_0 \cdot f(\Theta) \cdot \Theta_w. \quad (55)$$

С учетом зависимости $\lambda = \lambda_0(1 + at)$, имеем:

$$Bi = \frac{\lambda \cdot l}{l_0(1 + at)} = \frac{Bi_0}{1 + at},$$

или

$$Bi = \frac{Bi_0}{1 + \frac{8\Theta_w}{8\Theta_w}}. \quad (56)$$

Граничное условие имеет вид:

$$-\frac{\partial \Theta_w}{\partial \xi} = Bi_0 \cdot \frac{1}{1 + \frac{8\Theta_w}{8\Theta_w}} \cdot \Theta_w. \quad (57)$$

Функция $f(\Theta) = \frac{1}{1 + \frac{8\Theta_w}{8\Theta_w}}$ изменяется следующим образом:

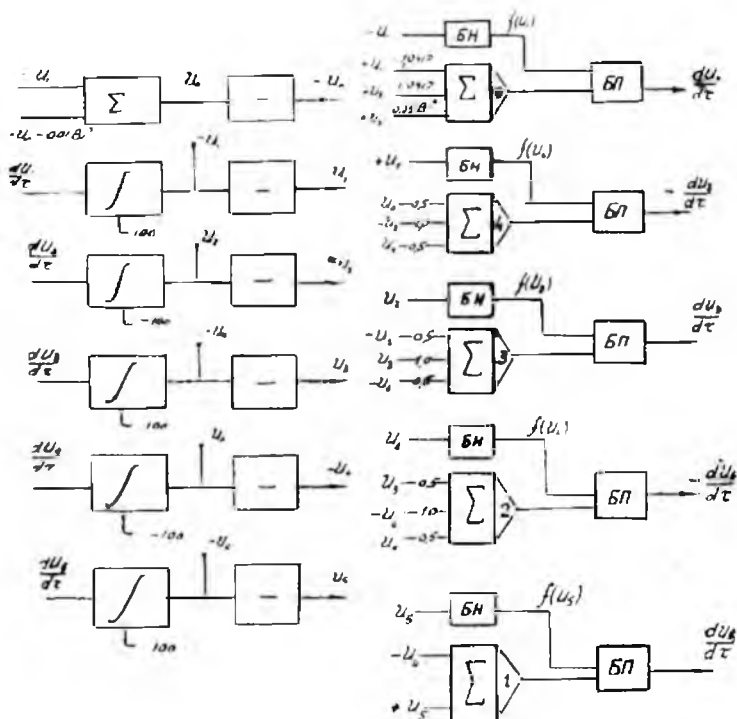
Θ	0, 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0
$f(\Theta)$	1,0; 0,746; 0,620; 0,542; 0,488; 0,447; 0,415; 0,390; 0,369; 0,350; 0,333

Блок — схема для этого варианта представлена на фиг. 3.

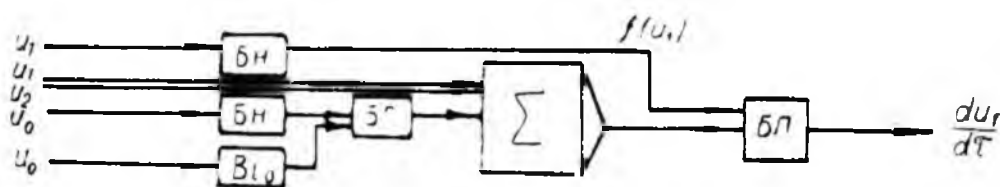
Решение проведено при $Bi_0 = 5,0; 10,0$ — конечном значении критерия Био (при $\Theta = 0$). Также было проведено решение при начальном значении критерия Био, равном 20,0 (при $\Theta = 1,0$). В этом случае процесс идет при нарастающей интенсивности теплообмена:

$$Bi_0 = 20,0 \quad Bi = 60,0$$

$$\Theta = 1 \quad \Theta = 0.$$



Фиг. 3.

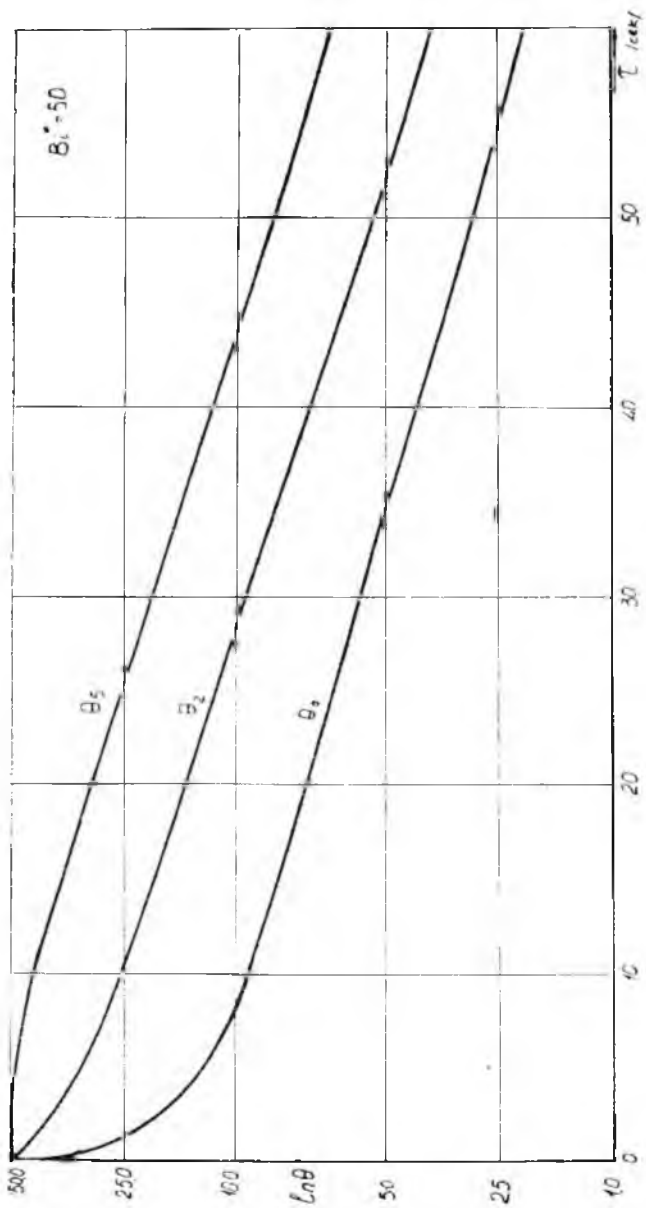


Фиг. 4.

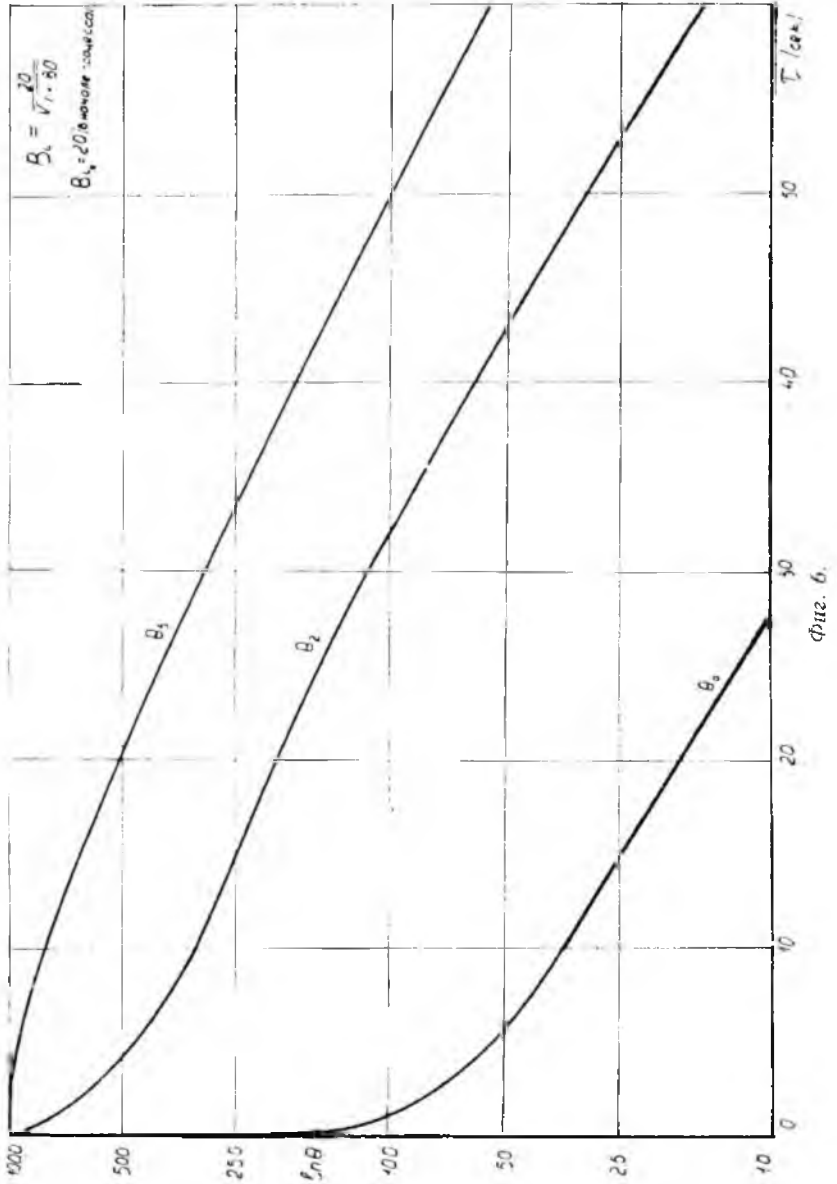
Результаты моделирования

Данные вычислений на машине ИПТ-5 приведены в таблицах 2 — 8 и на графиках фиг. 5, 6. Кривые $\Theta = f(F_0)$ представлены в полупологарифмических координатах.

Результаты оказались следующими. По истечении некоторого периода времени от начала процесса в опытах с $V_i = \text{const}$, наблюдалась регуляризация функции Φ , несмотря на переменность λ и c . Во всех точках бесконечной пластины логарифм Φ со временем



Фиг. 5.



переходит в линейную функцию. Величина темпа изменения Φ сохраняется в течение всего процесса. Эта особенность имеет место при различных значениях критерия Био. Результаты этого примера качественно одинаковы с экспериментами, описанными в [8] и дают возможность, по нашему мнению, признать существование автолинеаризации граничного условия 3-го рода, которая теоретически была предсказана в [8]. Особенность нелинейных процессов сглаживаться при линеаризации граничного условия подтверждена таким образом дважды — в экспериментах (реальный процесс), и при решении задачи на электронной модели.

Примеры, которые моделировались при нелинейном граничном условии 3-го рода показали, что эта нелинейность приводит к нелинейному характеру изменения логарифма функции Φ . Иными словами, регулярного режима в этом случае нет, темп охлаждения — величина переменная.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Тихонов. Изв. АН СССР (серия «География и Геофизика»), № 3, 461, 1937.
2. M. S. O'g m. J. Appl. Phys., 22, 952, 1951.
3. L. Boltzmann. Ann. Physik, 53, 959, 1894.
4. Л. П. Кудряшев, А. В. Темников, В. П. Веселов «Исследование нелинейных задач нестационарной теплопроводности с помощью электронных моделей». Сб. трудов КуАИ, вып. XII, 1961.
5. Л. П. Кудряшев, А. В. Темников, «Об одном приеме решения нелинейных задач нестационарной теплопроводности на сеточных электронинтеграторах». Сб. трудов КуАИ, вып. XII, 1961.
6. Л. П. Кудряшев, А. В. Темников «Простые законы подобия в явлении нестационарной теплопроводности в металлах при зависимости теплофизических коэффициентов от температуры». Сб. трудов КуАИ, вып. XII, 1961.
7. Л. П. Кудряшев, П. Л. Кудряшова. «Применение интегральных соотношений Л. С. Лейбензона к решению нелинейных задач нестационарной теплопроводности» ИВУЗ «Авиационная техника», № 4, 1965.
8. Л. П. Жемков. «Обобщение теории тепловой регулярности на случай переменных теплофизических характеристик», диссертация, Минск, 1962.