КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
ТРУДЫ. ВЫПУСК XXIV. 1966 г.
Вопросы механики жидкостей и газов

Л. И. КУДРЯШЕВ, Б. Р. БЕЛОСТОЦКИЙ

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ТЕПЛООБМЕН В АКТИВНЫХ ТЕЛАХ ИМПУЛЬСНЫХ ОПТИЧЕСКИХ КВАНТОВЫХ ГЕНЕРАТОРОВ НА РУБИНЕ В САПФИРОВОЙ ОБОЛОЧКЕ

Принятые обозначения

T — температура,
$T_м$ — максимальная температура кристалла,
T_f — температура среды,
$\bar{T}, \bar{\Theta}$ — средние температуры,
n — показатель преломления,
R_1, R_2 — радиусы и ядра оболочки,
r_1 — безразмерный радиус,
индексы н — накачка, о — охлаждение, Ki, Fo, Bi — критерии Кирпичева, Фурье, Био, m — номер накачки или последующего процесса охлаждения, $J_0(\mu_n)$, $J_1(\mu_n)$ — функции Бесселя

Использование составного цилиндра (активное тело в оболочке [1]) в качестве рабочего вещества оптического квантового генератора (ОКГ) представляет интерес как с точки зрения увеличения радиации накачки и уменьшения плотности радиационного шума в генераторе, так и в связи с устранением генерации паразитных мод.

Конкретным примером такого активного тела может служить цилиндр из сапфира (Al_2O_3), в центральную часть которого введены ионы хрома. В случае рубинового ОКГ применение сапфировой оболочки в виду большой теплопроводности сапфира приводит к увеличению эффективности теплоотвода от активного элемента.

Как известно, ряд квантовых параметров активного вещества определяется его температурой. Переход в тепло части энергии накачки, обусловливающей нагрев активной среды, сильно влияет на их значения. Поэтому при решении вопроса об оптимальном режиме работы следует всегда учитывать температуру активного тела. Математическому описанию температурных полей в составных кристаллах импульсных ОКГ и посвящена данная работа.

Если теплофизические характеристики рабочего ядра и оболочки принять одинаковыми, то имеется возможность при постановке задачи значительно упростить ее формулировку, рассматривая температурное поле сложной системы, как единое для ядра и для сапфировой оболочки. Тогда, расценивая процесс накачки как весьма быстро протекающий процесс, среднюю по объему температуру тела, которая является исходной в дальнейшем, можно определить из следующего дифференциального уравнения:

$$2\int_0^k \mathrm{Ki}\, r_1\, dr_1 = \frac{d\overline{\Theta}}{d\,\mathrm{Fo}}, \tag{1}$$

где

$$\overline{\Theta} = 2\int_0^1 \Theta r_1\, dr_1; \tag{2}$$

$$\Theta = \frac{T - T_f}{T_{\text{м}} - T_f}; \quad \overline{\Theta} = \frac{\overline{T} - T_f}{T_{\text{м}} - T_f}.$$

Отметим, что в отличие от обычно рассматриваемой задачи, когда рабочий кристалл непосредственно охлаждается окружающей средой, в верхнем пределе интеграла (1) вместо единицы стоит отношение $\frac{R_1}{R_2} = k$. Это указывает на то, что при определении средней температуры системы внешняя оболочка считается в отношении радиации накачки не поглощающей средой.

Интегрирование (1) дает:

$$\overline{\Theta} = 2\int_0^{\mathrm{Fo}} \left(\int_0^k \mathrm{Ki}'\, r_1\, dr_1\right) d\mathrm{Fo} + \Theta_0 \tag{3}$$

или

$$\overline{\Theta} = 2\int_0^k \mathrm{Ki}'\, r_1\, dr_1 + \Theta_0. \tag{4}$$

На основании (4) для средней температуры при любой накачке тела будем иметь:

$$\overline{\Theta}_{\text{н},\, m} = \overline{\Theta}_{\text{н},\, 1} + \overline{\Theta}_{0,\, m-1} \tag{5}$$

Для определения $\overline{\Theta}_{0,\, m}$ воспользуемся следующей системой:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\Theta_{0,\, m-1}}{\partial\mathrm{Fo}} = \frac{1}{r_1}\frac{\partial}{\partial r_1}\left(r_1\frac{\partial\Theta_{0,\, m-1}}{\partial r_1}\right) && (a)\\ &\mathrm{Fo} = 0; \quad \Theta_{0,\, m-1} = \overline{\Theta}_{\text{н},\, m-1} && (б)\\ &-\left(\frac{\partial\Theta_{0,\, m-1}}{\partial r_1}\right)_{r_1=1} = \mathrm{Bi}\,\Theta_{0,\, m-1}\big|_{r_1=1} && (в)\end{aligned}\right| \tag{6}$$

Как известно [2], решение (6) имеет вид:

$$\Theta_{0,\, m-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\Theta}_{\text{н},\, m-1}}{\mu_n}\cdot\frac{J_1(\mu_n)}{J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)}\cdot J_0(\mu_n r_1)\exp(-\mu_n^2\,\mathrm{Fo}), \tag{7}$$

где μ_n — корни характеристического уравнения:

$$\mu_n \, J_1(\mu_n) = \mathrm{Bi}\, J_0(\mu_n). \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что уравнение (7) при $r_1 \cdot k$ характеризует распределение температуры в ядре, а в области изменения $k \leqslant r_1 \leqslant 1$ определяет температурное поле внутри оболочки. В частном случае, полагая в (7) $r_1 = k$ найдем температуру на границе кристалла и оболочки в любой момент охлаждения:

$$\Theta_{0,\, m-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta_{н,\, m-1}}{\mu_n} \cdot \frac{J_1(\mu_n)}{J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)} \cdot J_0(\mu_n k) \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}) \tag{9}$$

Средняя температура кристалла в период охлаждения находится из выражения:

$$(\overline{\Theta}_{0,\, m-1})_{ядра} = 2 \int_0^k \Theta_{0,\, m-1}\, r_1\, dr_1 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,\overline{\Theta}_{н,\, m-1} \cdot k}{\mu_n^2} \cdot \frac{J_1(\mu_n k)\, J_1(\mu_n)}{J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)} \cdot \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}) \tag{10}$$

Средняя температура оболочки в период охлаждения:

$$(\overline{\Theta}_{0,\, m-1})_{оболочки} = 2 \int_k^1 \Theta_{0,\, m-1}\, r_1\, dr_1 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,\overline{\Theta}_{н,\, m-1}}{\mu_n^2} \left[J_1(\mu_n) - kJ_1(\mu_n k)\right] \frac{J_1(\mu_n)}{J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)} \cdot \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}) \tag{11}$$

Средняя температура всей системы:

$$\overline{\Theta}_{0,\, m-1} = 2 \int_0^1 \Theta_{0,\, m-1}\, r_1\, dr_1 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,\overline{\Theta}_{н,\, m-1}}{\mu_n^2} \cdot \frac{J_1^2(\mu_n)}{J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)} \cdot \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}_0) \tag{12}$$

Полагая в (12) $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}_0$, находим среднюю температуру системы в конце процесса охлаждения:

$$\overline{\Theta}_{0,\, m-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,\overline{\Theta}_{н,\, m-1}}{\mu_n^2} \cdot \frac{J_1^2(\mu_n)}{J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)} \cdot \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}_0) \tag{13}$$

Количество тепла, участвующее в теплообмене в процессе охлаждения:

$$\frac{Q}{Q_0} = \overline{\Theta}_{н,\, m-1} \left\{1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2} \cdot \frac{J_1^2(\mu_n)}{J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)} \cdot \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}_0)\right\} \tag{14}$$

В соответствии с (4), (5), (7), (13) и (14) будем иметь:

$$\overline{\Theta}_{н,1} = 2\int_1^k \mathrm{Ki}' r_1\, dr_1 \tag{15}$$

$$\Theta_{0,1} = \overline{\Theta}_{н,1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} \cdot \frac{J_1(\mu_n)}{J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)} \cdot J_0(\mu_n r_1) \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}) \tag{16}$$

$$\overline{\Theta}_{0,1} = \overline{\Theta}_{н,1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2} \cdot \frac{J_1^2(\mu_n)}{J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)} \cdot \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}_0) \tag{17}$$

$$\frac{Q_1}{Q_0} = \overline{\Theta}_{н,1} \left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2} \cdot \frac{J_1^2(\mu_n)}{J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)} \cdot \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}_0)\right\} \tag{18}$$

В дальнейшем для простоты записи введем обозначение:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2} \cdot \frac{J_1^2(\mu_n)}{J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)} \cdot \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}_0) \tag{19}$$

Так что:

$$\overline{\Theta}_{0,1} = \overline{\Theta}_{н,1} A \tag{20}$$

$$\frac{Q_1}{Q_0} = \overline{\Theta}_{н,1} (1 - A) \tag{21}$$

$$\overline{\Theta}_{н,2} = \overline{\Theta}_{н,1} + \overline{\Theta}_{0,1} = \overline{\Theta}_{н,1}(1 + A) \tag{22}$$

$$\Theta_{0,2} = \overline{\Theta}_{н,2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} \cdot \frac{J_1(\mu_n)}{J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)} \cdot J_0(\mu_n r_1) \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}) =$$

$$= \overline{\Theta}_{н,1} (1 + A) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} \cdot \frac{J_1(\mu_n)}{J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)} \cdot J_0(\mu_n r_1) \cdot \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}) \tag{23}$$

$$\overline{\Theta}_{0,2} = \overline{\Theta}_{н,1} (1 + A) A \tag{24}$$

$$\frac{Q_2}{Q_0} = \overline{\Theta}_{н,2} (1 - A) = \overline{\Theta}_{н,1} (1 - A)(1 + A) \tag{25}$$

$$\overline{\Theta}_{н,3} = \overline{\Theta}_{н,1} + \overline{\Theta}_{0,2} = \overline{\Theta}_{н,1} (1 + A + A^2) \tag{26}$$

$$\Theta_{0,3} = \overline{\Theta}_{н,1} (1 + A + A^2) \sum \frac{1}{\mu_n} \cdot \frac{J_1(\mu_n)}{J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)} \cdot J_0(\mu_n r_1) \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}) \tag{27}$$

$$\overline{\Theta}_{0,3} = \overline{\Theta}_{н,1} (1 + A + A^2) \tag{28}$$

$$\frac{Q_3}{Q_0} = \overline{\Theta}_{н,1} (1 - A) A (1 + A + A^2) \tag{29}$$

$$\overline{\Theta}_{н,4} = \overline{\Theta}_{н,1} + \overline{\Theta}_{0,3} = \overline{\Theta}_{н,1} (1 + A + A^2 + A^3) \tag{30}$$

$$\Theta_{0,4} = \overline{\Theta}_{н,1} (1 + A + A^2 + A^3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} \cdot \frac{T_1(\mu_n)}{T_0^2(\mu_n) + T_1^2(\mu_n)} \times$$

$$\times J_0(\mu_n r_1)\exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}) \tag{31}$$

$$\bar{\Theta}_{0,4} = \bar{\Theta}_{н,1} A(1 + A + A^2 + A^3) \tag{32}$$

$$\frac{Q_4}{Q_0} = \bar{\Theta}_{н,4}(1 - A) = \bar{\Theta}_{н,1}(1 - A)(1 + A + A^2 + A^3) A \tag{33}$$

Не представляет труда продолжить запись:

$$\bar{\Theta}_{н,m} = \bar{\Theta}_{1,н} + \bar{\Theta}_{0,m-1} = \bar{\Theta}_{1,н}(1 + A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{m-1}) =$$

$$= \bar{\Theta}_{1,н} \sum_{m=1}^{m} A^{m-1} \tag{34}$$

$$\Theta_{0,m} = \bar{\Theta}_{н,1} \sum_{m=1}^{m} A^{m-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} \cdot \frac{J_1(\mu_n)}{J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)} \cdot \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}) \tag{35}$$

$$\bar{\Theta}_{0,m} = \bar{\Theta}_{н,1} A \sum_{m=1}^{m} A^{m-1}. \tag{36}$$

$$\frac{Q_m}{Q_0} = \bar{\Theta}_{н,1}(1 - A) A \sum_{m=1}^{m} A^{m-1} \tag{37}$$

Поскольку $A < 1$, то при $m \to \infty$ получим:

$$\frac{\bar{\Theta}_{н,\infty}}{\bar{\Theta}_{н,1}} = \frac{1}{1 - A}; \tag{38}$$

$$\frac{\bar{\Theta}_{0,\infty}}{\bar{\Theta}_{н,1}} = \frac{A}{1 - A}; \tag{39}$$

$$\frac{\Theta_{0,\infty}}{\bar{\Theta}_{н,1}} = \frac{1}{1 - A} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} \cdot \frac{J_1(\mu_n) J_0(\mu_n r_1)}{J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)} \cdot \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}) \tag{40}$$

$$\frac{Q_\infty}{Q_0} = \bar{\Theta}_{н,1} A \tag{41}$$

При рассмотрении вышеизложенного мы исходим из следующих приемлемых допущений:

1. Кристалл рассматривается как бесконечный цилиндр.
2. Время накачки $\tau_н$ и время охлаждения τ_0 сохраняют одинаковые значения в течение всего процесса.
3. Теплофизические характеристики вещества считаются постоянными, т. е. независящими от температуры.
4. Коэффициент теплообмена между поверхностью оболочки и охлаждающей средой постоянен.

ВЫВОДЫ

1. Получено решение системы уравнений, описывающих нестационарный теплообмен активного элемента в сапфировой оболочке.

2. Конечные расчетные соотношения связывают основные характеристики, определяющие теплообмен активного элемента ОКГ.

3. Представленное в соответствии с теорией подобия в безразмерном виде решение дает возможность теоретического анализа широкого класса задач теплообмена в ОКГ.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. E. Devlin, J. Mc. Kenna, A. D. May, A. L. Schawlon, Appl. Optics, 1, 11, 1962.
2. А. В. Лыков. «Теория теплопроводности». ГИТТЛ, М., 1962.
3. Н. С. Котляков, Э. Б. Глинер, М. Н. Смирнов: «Основные дифференциальные уравнения математической физики», М., Физматгиз, 1962