

Б. Р. БЕЛОСТОЦКИЙ

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ АКТИВНЫХ КРИСТАЛЛОВ ИМПУЛЬСНЫХ ОПТИЧЕСКИХ КВАНТОВЫХ ГЕНЕРАТОРОВ

Чрезвычайно большое значение при проектировании оптических квантовых генераторов (ОКГ) имеет правильный выбор системы отвода тепла, выделяющегося в активном кристалле при работе генератора. В самом деле, с одной стороны, температурные зависимости физических параметров кристалла определяют важнейшие характеристики ОКГ, такие как энергию излучения, порог генерации, ширину линии люминисценции и т. д. С другой стороны, из-за низкого к. п. д. всей системы большая часть энергии накачки не используется и выделяется в виде тепла. Отвод выделяющегося тепла, а, значит, и основные параметры ОКГ в первую очередь зависят от эффективности системы охлаждения активного тела генератора.

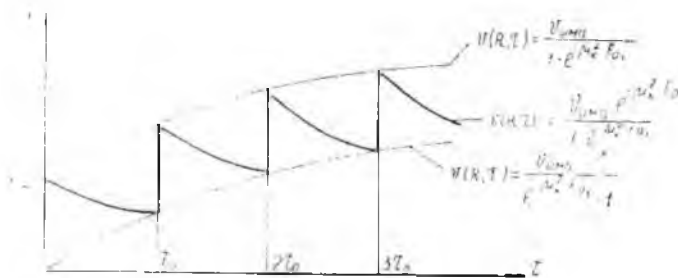
Существующий опыт конструирования квантовых генераторов показывает, что такие системы охлаждения являются довольно сложными и значительно увеличивают вес и габариты всего устройства. Для разумного выбора системы охлаждения необходимо знать поле температур активного кристалла в процессе работы. Математическому описанию температурных полей в кристаллах импульсных оптических квантовых генераторов и посвящена данная работа.

Обычно для оптической накачки кристалла используются импульсные источники света со сплошным спектром излучения в широком интервале длин волн. Определенная доля этого излучения, зависящая от спектра поглощения активного кристалла, его формы, размеров и от характеристик оптической схемы накачки ОКГ, поглощается в кристалле. Методы расчета этой доли поглощенного излучения описаны в литературе и нами не рассматриваются — поглощенная кристаллом энергия E предполагается заданной.

Время процесса поглощения энергии атомами кристаллической решетки активного тела определяется практически временем накачки, так как все внутрикристаллические процессы, приводящие к нагреву кристалла, происходят значительно быстрее. Длительности импульсов накачки в существующих ОКГ лежат в пределах 10^{-3} — 10^{-2} сек., а частоты повторения не превышают 10—50 гц. Другими словами, скважность импульсов накачки и, следовательно, тепловых импульсов составляет 10^2 — 10^4 , а для ОКГ с энергией излучения более 30 Дж достигает 10^7 . Это означает, что кристалл можно рассматривать как тело с внутренними, определенным образом распределенными по объему, практически мгновенными источниками тепла, пренебрегая перераспределением тепловой энергии, происходящим за время импульса накачки путем теплопроводности внутри кристалла. Сделанное допущение значительно упрощает решение задачи и придает ему большую общность, так как позволяет исключить из рассмотрения форму импульса накачки и кинетику процессов возбуждения и релаксации возбужденных состояний в кристалле.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЕ

Пусть активное тело оптического квантового генератора имеет форму цилиндра с радиусом R и длиной L , причем $L \gg R$. Цилиндр отдает тепло в окружающую среду через боковую поверхность. Температуру среды условно примем равной нулю. Рассмотрим поле температур в кристалле в промежутке времени $[0, \tau_0]$, (фиг. 1).



фиг. 1 — К постановке и решению задачи о распределении температур в активном кристалле оптического квантового генератора. Формулы дают значения температур поверхности активных кристаллов в квазистационарном режиме при $B\tau \ll 0,5$, $Fo > 0,05$.

Решение задачи проведем при следующих допущениях:

1. Физические параметры тела: а) коэффициент теплопроводности — λ ; б) удельная теплоемкость — c ; в) плотность — γ , а, следовательно, и коэффициент температуропроводности — a в рассматриваемом интервале температур постоянны.
2. Поглощение энергии накачки происходит равномерно по объ-

ему. Следовательно, за время накачки τ_0 тело равномерно разогревается до температуры

$$\vartheta_{\text{взм}} = \frac{E}{c\gamma V}, \quad (1)$$

где V — объем цилиндра.

3. Так как $\tau_0 \gg \tau_{\text{пр}}$, то можно пренебречь длительностью разогрева и считать, что в момент времени $\tau = 0$ тело имеет повсюду температуру $\vartheta_{\text{взм}}$.

4. Коэффициент теплоотдачи α на границе кристалла и среды будем считать одинаковым во всех точках наружной поверхности кристалла и постоянным во времени.

5. Перепады температуры по длине цилиндра отсутствуют, следовательно, изотермические поверхности будут представлять коаксиальные цилиндры, а температура есть функция только одной координаты и времени.

В качестве наиболее удобной координатной системы естественно принять цилиндрическую систему координат. Общеизвестно, что форма температурного поля для такого случая охлаждения описывается уравнением Фурье:

$$\frac{\partial \vartheta(r, \tau)}{\partial \tau} = a \left[\frac{\partial^2 \vartheta(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta(r, \tau)}{\partial r} \right]. \quad (2)$$

Чтобы решение уравнения (2) удовлетворяло условию однозначности, его следует провести при определенных краевых условиях. Так как в момент времени $\tau = 0$ тело во всех точках имеет одинаковую температуру $\vartheta_{\text{взм}}$, то математически начальное условие можно представить в виде:

$$\vartheta(r, 0) = \vartheta_{\text{взм}}.$$

Пространственными краевыми условиями для уравнения (2) являются граничное условие третьего рода:

$$\frac{\partial \vartheta(R, \tau)}{\partial r} = - \frac{\alpha}{\lambda} \vartheta(R, \tau) \quad (3)$$

и условие симметрии температурного поля

$$\frac{\partial \vartheta(0, \tau)}{\partial r} = 0. \quad (4)$$

Искомое температурное распределение имеет вид [1]:

$$\vartheta(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0 \left(\mu_n \frac{r}{R} \right) \exp(-\mu_n^2 Fo), \quad (5)$$

где $Fo = \frac{a\tau}{R^2}$ — критерий Фурье;

μ_n — корень характеристического уравнения

$$\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} = \frac{1}{Bi} \mu;$$

$J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)$, $J_0(\mu)$, $J_1(\mu)$ — функции Бесселя нулевого и первого порядка;

$$Bi = \frac{aR}{\lambda} — критерий Био;$$

$$C_n = \frac{2Bi\vartheta_{\text{вмп}}}{J_0(\mu_n) [\mu_n^2 + Bi^2]}.$$

В момент времени τ_0 (фиг. 1) в результате поглощения части энергии накачки, в силу выше сказанного, температура любой точки цилиндра увеличивается на величину $\vartheta_{\text{вмп}}$.

Чтобы описать процесс охлаждения тела в промежутке времени $[\tau_0, 2\tau_0]$, мы можем воспользоваться уравнением (2) наложив на него граничные условия (3) и (4). Начальное условие для этого отрезка времени запишется следующим образом:

$$\vartheta(r, 0) = \vartheta_1(r) + \vartheta_{\text{вмп}}, \quad (6)$$

где $\vartheta_1(r)$ описывается рядом (5) при $\tau = \tau_0$.

Нетрудно показать, что в этом случае решение уравнения (2) можно привести к виду:

$$\begin{aligned} \vartheta(r, \tau) = & \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\mu_n^2 F_0) J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left[-\mu_n^2 \frac{a}{R^2}(\tau_0 + \tau)\right] J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

Первый ряд выражения (7) полностью совпадает с выражением (5), описывающий процесс охлаждения кристалла в интервале времени $[0, \tau_0]$ рис. 1, второй ряд, как легко заметить, определяет температуру любой точки тела в интервале времени $[\tau_0, \tau]$ при отсутствии второго импульса энергии накачки. Таким образом, температурное поле в кристалле в интервале времени $[\tau_0, 2\tau_0]$ можно представить как результат наложения двух полей: вновь возникающего под действием второго импульса накачки температурного поля, полностью идентичного температурному полю в интервале времени $[0, \tau_0]$ и остаточного температурного поля первого импульса в интервале времени $[\tau_0, 2\tau_0]$.

Аналогично можно показать, что функция, описывающая процесс охлаждения тела после $(k+1)$ вспышки, будет иметь вид:

$$\vartheta(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(1 + e^{-\mu_n^2 F_{0_1}} + e^{-2\mu_n^2 F_{0_1}} + \dots + e^{-k\mu_n^2 F_{0_1}}\right) J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) e^{-\mu_n^2 F_0}. \quad (8)$$

В скобках последнего выражения стоит ряд, который представляет геометрическую убывающую прогрессию со знаменателем прогрессии $q = e^{-\mu_n^2 Fo_1}$. Заменяв этот ряд его суммой, окончательно получим распределение температур в кристалле в квазистационарном режиме:

$$\theta(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Bi\theta_{\text{нмп}}}{J_0(\mu_n) [\mu_n^2 - Bi^2]} \cdot \frac{\exp(-\mu_n^2 Fo)}{1 - \exp(-\mu_n^2 Fo_1)} \cdot J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right).$$

Ряд (9) настолько быстро сходится, что для практических случаев следует ограничиться только одним его членом. Оценить остаточный член φ_n выражения (9) можно по формуле:

$$\varphi_n = \frac{Bi\theta_{\text{нмп}}}{\left(\mu_{n+\frac{1}{2}} - \mu_n\right)\mu_{n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\exp Bi^2 Fo}{\left|1 - \exp(-\mu_{n+\frac{1}{2}}^2 Fo_1)\right|} \cdot \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \quad (10)$$

$Fo_1 \left(\mu_{n+\frac{1}{2}} - \mu_n \right)^2$

где $\mu_{n+\frac{1}{2}}$ находится как среднее арифметическое μ_n и μ_{n+1} . При $\tau = \tau_0$, $Bi < 0,5$, $Fo > 0,05$ выражение для температуры на поверхности кристалла принимает совсем простой вид:

$$\theta(R, \tau_0) = \frac{\theta_{\text{нмп}}}{\exp 2Bi Fo - 1}.$$

Если необходимо вычислить температуру некоторой точки кристалла после любого ($k=i$) импульса накачки, достаточно заменить сумму убывающей геометрической прогрессии на сумму i членов прогрессии. В случае, если известен характер изменения температуры в зависимости от r и t для системы с заданными параметрами, можно определить коэффициент теплоотдачи α , что необходимо для проведения расчетов и выбора элементов системы охлаждения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При выполнении выше перечисленных допущений можно определить распределение температуры в активном кристалле любой формы (пластина, параллелепипед и т. п.). Для чего необходимо известный закон охлаждения данного образца при единичной накачке помножить на сумму геометрической прогрессии со знаменателем прогрессии.

$$q^* = \exp(-\mu_n^2 Fo_1),$$

где μ_n — корень соответствующего характеристического уравнения.

Все вышеизложенное остается справедливым и для случаев неравномерного поглощения энергии накачки. Некоторые затруднения

могут возникнуть лишь при взятии интеграла типа $\int_0^R r^n (r) J_n \left(\lambda_n \frac{r}{R} \right) dr$, с которым мы встречаемся при определении постоянных интегрирования в решениях уравнения (2)

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Лыков, Теория теплопроводности, М., Гостехиздат, 1952.
 2. Н. Н. Лебедев, Специальные функции и их приложения, М.—Л., Физматгиз, 1963.
-