РАЗРАБОТКА ДЛЯ САПР ПОДСИСТЕМЫ ВИЗУАЛИЗАЦИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРОЕКТИРОВАНИЯ МАЛОРАЗМЕРНЫХ ГТД

Григорьев В. А., Морозов В. А.
Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара

На начальном этапе проектирования малоразмерных ГТД разработчику приходится иметь дело с самой разнообразной информацией, представляемой в графической форме. При подготовке исходных данных к такой информации следует отнести типовые (или с прототипа) аэродинамические характеристики ЛА, регламентируемые профили полета, характеристики воздушных винтов (винтовентиляторов), характеристики ЛМ, зависимости по охлаждающему воздуху, прочностные характеристики.

Обычно на начальном этапе проектирования конкретные характеристики компрессоров и турбин еще неизвестны, тогда как известны обобщенные характеристики, в том числе и характеристики семейства компрессоров. Обобщенные характеристики семейства компрессоров отображаются как линии уровня значений к.п.д. компрессора $\overline{\eta}_{\kappa}$, частоты вращения $\overline{n}_{\kappa}$ в координатах $\overline{\pi}_{\kappa}$ и $\overline{q}(\lambda)$ при фиксированных значениях расчетной степени повышения давления $\pi^{*}_{\kappa p}$, то есть как результат решения систем уравнений (1) и (2):

$$\begin{cases} \pi^{*}_{\kappa p}\left(\overline{q}(\lambda)\right) = const, \\ \overline{n}_{\kappa}\left(\overline{q}(\lambda)\right) = const; \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \pi^{*}_{\kappa p}\left(\overline{q}(\lambda)\right) = const, \\ \overline{\eta}_{\kappa}\left(\overline{q}(\lambda)\right) = const; \end{cases} \qquad (2)$$

Такое представление недостаточно удобно, поскольку в каждый конкретный момент времени можно анализировать только один срез по текущему значению расчетной степени повышения давления. Для улучшения качества восприятия проектной информации становится необходимым визуализировать многомерные зависимости, например, как в случае сплайн-аппроксимации обобщенных характеристик, трехмерные параболические функции. Трехмерные изображения на двумерном носителе (экран дисплея, лист бумаги) часто представляется в виде проекции трехмерной сетки на двумерную поверхность (рис.2).

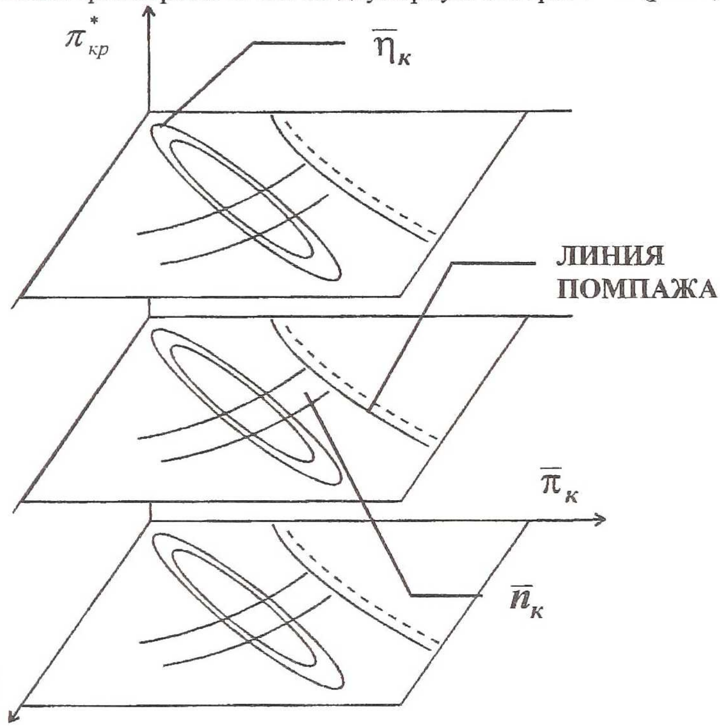

Рис.1. Обобщенные характеристики семейства компрессоров в координатах $\overline{\pi}_к$, $\overline{q}(\lambda)$ и $\pi^*_{кр}$.

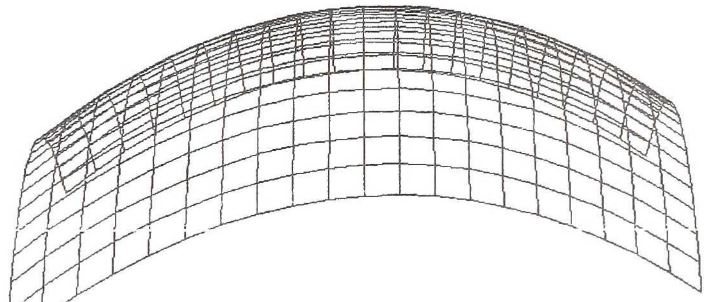

Рис.2. Изображение трехмерной поверхности

Часто имеет место ситуация, в которой известен набор значений функции в некотором наборе точек (узлах) и требуется построить визуальную картину. Для получения линий сетки по имеющимся значениям в ячейках можно применить метод сплайн-аппроксимации.

Рассмотрим частный случай построения двумерного контура (для многомерного случая построение производится аналогично). Пусть имеется N точек с координатами $(X_0,Y_0),(X_1,Y_1),\dots,(X_{N-1},Y_{N-1})$. Тогда для каждого звена, соединяющего соседние точки, строятся полиномы K-го порядка (3)

$$x_n(t)=\sum_{k=0}^{K}a_{kn}\,t^k\ ,\qquad y_n(t)=\sum_{k=0}^{K}b_{kn}\,t^k\ ,\qquad (n=0,1,\dots,N-1;\qquad 0\le t\le 1),\tag{3}$$

т.е. определяются их коэффициенты $\{a_{kn}\}$, $\{b_{kn}\}$ из условия равенства значений производных полиномов в узловых точках и равенства значений полиномов соответствующим координатам отмеченных точек (4):

$$\begin{aligned} &x_{n+1}^{(k)}=x_n^{(k)}(1), && y_{n+1}^{(k)}=y_n^{(k)}(1), && 0\le k\le K-1,\\ &x_0^{(k)}=x_{N-1}^{(k)}(1), && y_0^{(k)}=y_{N-1}^{(k)}(1), && \\ &x_n(0)=X_n, && y_n(0)=Y_n, && 0\le n\le N-1. \end{aligned}\tag{4}$$

Данный метод сплайн-аппроксимации целесообразно использовать при следующих значениях параметра K. При K=1 имеем наиболее простую кусочно-линейную интерполяцию, т.е. контур аппроксимируется многоугольником с N вершинами. У сплайнов второго порядка (K=2) при непрерывности первой производной вторая производная, как правило, меняется по участкам скачкообразно, т.е. чередуются интервалы выпуклости и вогнутости контура, что делает такую аппроксимацию практически непригодной. При K=3 получаем гладкую аппроксимацию контура, что удовлетворяет требованиям большинства практических ситуаций. Сплайны более высокого порядка использовать нецелесообразно в силу сложности алгоритмов расчета и применения сплайн-аппроксимации.

Рассмотрим подробнее случай $K = 3$. Систему (4) для x можно записать в виде

$$
\begin{gathered}
X_N = X_0, \\
x_n(t) = a_n t^3 + b_n t^2 + c_n t + X_n, \quad 0 \le t \le 1, \quad 0 \le n \le N, \\
a_N = a_0, \quad b_N = b_0, \quad c_N = c_0, \\
\begin{cases}
x_n(1) = a_n + b_n + c_n + X_n = x_{n+1}(0) = X_{n+1}, \\
x_n'(1) = 3a_n + 2b_n + c_n = x_{n+1}'(0) = c_{n+1}, \\
x_n''(1) = 6a_n + 2b_n = x_{n+1}''(0) = 2b_{n+1},
\end{cases} \\
0 \le n \le N-1.
\end{gathered} \tag{5}
$$

Обозначим $d_n = X_{n+1} - X_n$, тогда из первого уравнения системы следует, что

$$c_n = d_n - (a_n + b_n),\ 0 \le n \le N. \tag{6}$$

Подставим это выражение в систему и преобразуем ее:

$$
\begin{cases}
a_{n+1} = d_{n+1} - d_n - 5a_n - 2b_n, \\
b_{n+1} = 3a_n + b_n, \quad 0 \le n \le N-1, \\
a_N = a_0, \\
b_N = b_0,
\end{cases} \tag{7}
$$

При любом значении N из рекурентных соотношений (7) можно получить выражения для a_N и b_N через a_0 и b_0:

$$
\begin{aligned}
a_N &= \alpha_a a_0 + \beta_a b_0 + \gamma_a, \\
b_N &= \alpha_b a_0 + \beta_b b_0 + \gamma_b,
\end{aligned} \tag{8}
$$

Из условий замкнутости контура ($a_N = a_0$ и $b_N = b_0$) и уравнений (8) получим систему:

$$
\begin{cases}
(\alpha_a - 1)a_0 + \beta_a b_0 = -\gamma_a, \\
\alpha_b a_0 + (\beta_b - 1)b_0 = -\gamma_b.
\end{cases} \tag{9}
$$

Решая систему (9) методом Крамера, придем к

$$a_0 = {(\gamma_a(1-\beta_b)+\beta_a\gamma_b)}\Big/{\Delta},$$

$$b_0 = {(\gamma_b(1-\alpha_a)+\alpha_b\gamma_a)}\Big/{\Delta}, \qquad (10)$$

$$где\ \Delta = (\alpha_a - 1)(\beta_b - 1) - \alpha_b\beta_a.$$

Остальные коэффициенты получаются из выражений (5), (6), (7).

Суть данного метода заключается в раздельной сплайн-аппроксимации каждой координатной составляющей неизвестной зависимости. При этом каждая координата представляется функцией некоторого параметра, табулированной с постоянным шагом (параметр и шаг выбирается одинаковым для всех составляющих, этим обеспечивается непрерывность и гладкость результирующего сплайна).

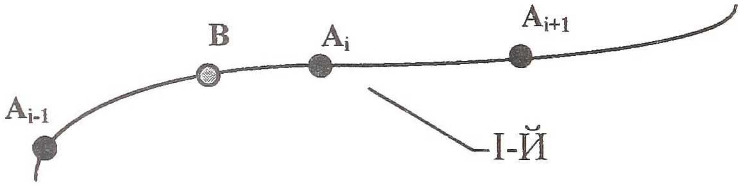

Рис. 3. Сплайн-аппроксимация k-мерной кривой

$$\mathbf{A_i} = \overline{(\mathbf{x_i^1},\ldots,\mathbf{x_i^k})},\ \mathbf{B_i} = \overline{(\mathbf{y_i^1},\ldots,\mathbf{y_i^k})}.$$

$$\mathbf{y_i^m} = \mathbf{f_i^m(t)},\quad \mathbf{0 \le t \le 1},$$

где $f^m{}_i(t)$ – полином порядка P.

$$\mathbf{f_i^m(1) = f_{i+1}^m(0) = x_i^m};$$

производные до порядка P-1:

$$\left(\frac{\mathbf{d^p f_i^m}}{\mathbf{dt^p}}\right)\mathbf{(1)} = \left(\frac{\mathbf{d^p f_{i+1}^m}}{\mathbf{dt^p}}\right)\mathbf{(0)} \qquad .(11)$$

Этим обеспечивается гладкость кривой:

$$\left(\frac{\mathbf{d^p y_i^m}}{\mathbf{d^p y_i^n}}\right)\mathbf{(1)} = \left(\frac{\mathbf{d^p y_{i+1}^m}}{\mathbf{d^p y_{i+1}^n}}\right)\mathbf{(0)} \qquad (12)$$

при любых сочетаниях (m,n).