

## ПОСТРОЕНИЕ ОБОЛОЧЕЧНОГО ВОЛНОВОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

Ермаков А.И.

Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара

Волновой оболочечный конечный элемент построим путем численного решения комплекса задач Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих динамику конической оболочки переменной толщины. Для вывода такой системы уравнений воспользуемся гипотезами Тимошенко. Вывод выполним в локальной системе координат  $ox\varphi z$ . Ее начало расположено в срединной поверхности оболочки, ось  $z$  направлена по образующей, ось  $x$  является внешней нормалью,  $\varphi$  изменяется в направлении оси  $y$ . Система координат, перемещения, а также усилия, действующие на элемент оболочки, изображены на рис.1.

В соответствии с гипотезами Тимошенко в принятой системе координат линейные и угловые деформации определяются зависимостями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z^o &= \frac{\partial W}{\partial z}; \quad \varepsilon_y^o = \frac{\partial V}{r \partial \varphi} + \frac{U}{r} \cos \gamma + \frac{W}{r} \sin \gamma; \quad \gamma_{z\varphi}^o = \frac{\partial W}{r \partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{V}{r} \sin \gamma; \\ \gamma_{zx}^o &= \frac{\partial U}{\partial z} + \alpha_y; \quad \gamma_{x\varphi}^o = \frac{\partial U}{r \partial \varphi} - \frac{V}{r} \cos \gamma - \alpha_z; \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\varepsilon_y^o, \varepsilon_z^o$  – линейные деформации срединной поверхности;

$U, V, W$  – линейные смещения срединной поверхности;

$\gamma_{z\varphi}^o, \gamma_{zx}^o, \gamma_{x\varphi}^o$  – угловые деформации в срединной поверхности в плоскостях  $ozy, ozx$  и  $oxy$ ;

$\alpha_y, \alpha_z$  – угловые смещения относительно осей  $y$  и  $z$ .

Линейные смещения в произвольной точке сечения с координатой  $x$  могут быть найдены с помощью соотношений:

$$V^x = V - \alpha_z x; \quad W^x = W + \alpha_y x; \quad U^x = U \quad (2)$$

где  $U^x, V^x, W^x$  – линейные смещения в точке сечения с координатой  $x$ .

Формулы Коши и выражения (2) позволяют определить деформации в произвольной точке оболочки:

$$\varepsilon_z^x = \varepsilon_z^o + \frac{\partial \alpha_y}{\partial z} x; \quad \varepsilon_y^x = \varepsilon_y^o + \left( \frac{\sin \gamma}{r} \alpha_y - \frac{\partial \alpha_z}{r \partial \varphi} \right) x; \quad (3)$$

$$\gamma_{z\varphi}^x = \gamma_{z\varphi}^o + \left( \frac{\partial \alpha_y}{r \partial \varphi} - \frac{\partial \alpha_z}{\partial z} + \frac{\sin \gamma}{r} \alpha_z \right) x; \quad \gamma_{zx}^x = \gamma_{zx}^o; \quad \gamma_{x\varphi}^x = \gamma_{x\varphi}^o \quad (4)$$

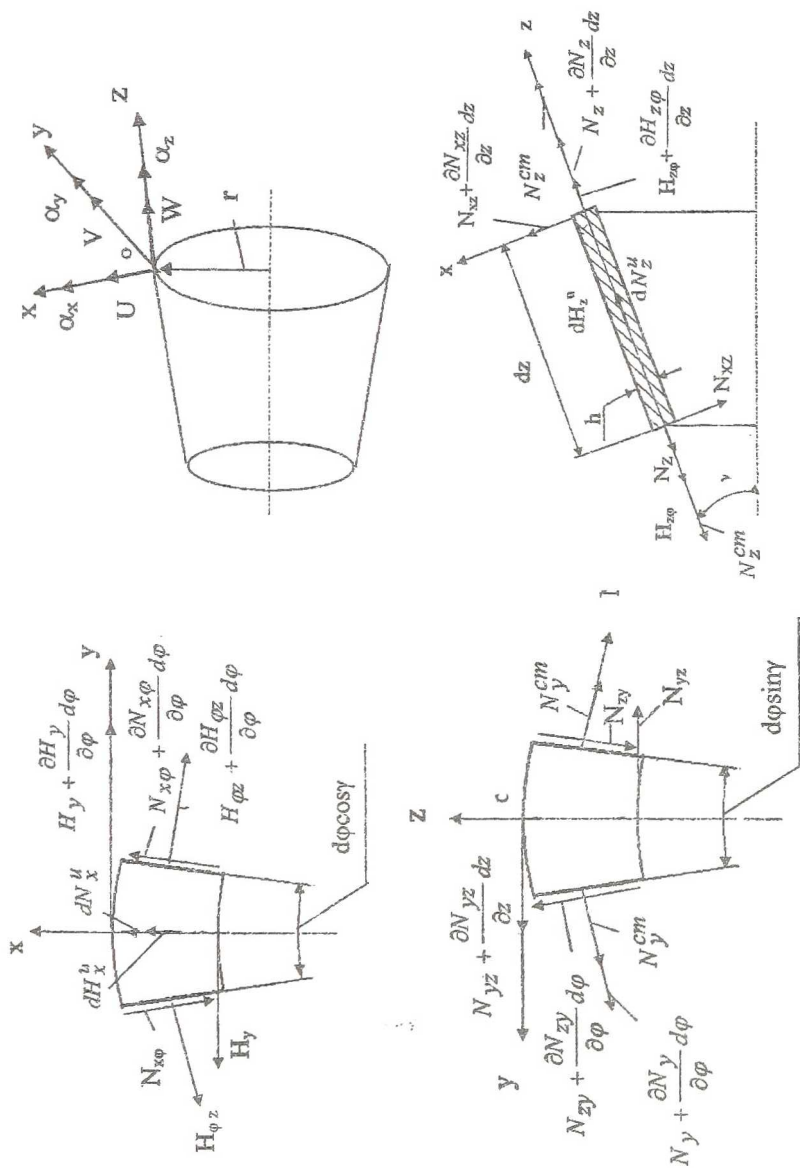


Рисунок 1 - Система координат и усилия, действующие на элемент оболочки.

Здесь  $\varepsilon_z^x, \varepsilon_y^x, \gamma_{z\varphi}^x, \gamma_{zx}^x, \gamma_{x\varphi}^x$  — линейные и угловые деформации в точке сечения оболочки с координатой  $x$ .

Определим напряжения в оболочке. Поскольку она находится в плоском напряженном состоянии, справедливо:

$$\sigma_z^x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_z^x + \mu \varepsilon_y^x); \quad \sigma_y^x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y^x + \mu \varepsilon_z^x);$$

$$\tau_{z\varphi}^x = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{z\varphi}^x; \quad \tau_{x\varphi}^x = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{x\varphi}^x; \quad \tau_{zx}^x = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{zx}^x;$$

где  $\sigma_z^x, \sigma_y^x, \tau_{z\varphi}^x, \tau_{zx}^x, \tau_{x\varphi}^x$  — нормальные и касательные напряжения;

$E$  — модуль упругости материала;

$\mu$  — коэффициент Пуассона.

Подставляя в эти формулы выражения для деформаций (1), (3) и (4), получаем:

$$\sigma_z^x = \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial W}{\partial z} + \mu \frac{\partial V}{r \partial \varphi} + \mu \frac{\cos \gamma}{r} U + \mu \frac{\sin \gamma}{r} W \right) \frac{E x}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{y}{r} + \mu \frac{\sin \gamma}{r} \alpha \frac{y}{r} - \mu \frac{\partial \alpha}{r \partial \varphi} \frac{z}{y} \right);$$

$$\sigma_y^x = \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial V}{r \partial \varphi} + \frac{\cos \gamma}{r} U + \frac{\sin \gamma}{r} W + \mu \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \frac{E x}{1-\mu^2} \left( \frac{\sin \gamma}{r} \alpha \frac{y}{r} - \frac{\partial \alpha}{r \partial \varphi} \frac{z}{y} + \mu \frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{y}{r} \right);$$

$$\tau_{z\varphi}^x = \frac{E}{2(1+\mu)} \left( \frac{\partial W}{r \partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\sin \gamma}{r} V \right) + \frac{E x}{2(1+\mu)} \left( \frac{\partial \alpha}{r \partial \varphi} \frac{y}{r} - \frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{z}{y} + \frac{\sin \gamma}{r} \alpha \frac{z}{y} \right);$$

$$\tau_{x\varphi}^x = \frac{E}{2(1+\mu)} \left( \frac{\partial U}{r \partial \varphi} - \frac{\cos \gamma}{r} V - \alpha \frac{z}{y} \right); \quad \tau_{zx}^x = \frac{E}{2(1+\mu)} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \alpha \frac{y}{r} \right).$$

Проинтегрировав напряжения по толщине оболочки, находим внутренние силы  $N_z, N_y, N_{yz}, N_{zy}, N_{xz}, N_{x\varphi}$  и моменты  $H_z, H_y, H_{\varphi z}, H_{z\varphi}$ :

$$H_y = D \left( \frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{y}{r} + \mu \frac{\sin \gamma}{r} \alpha \frac{y}{r} - \mu \frac{\partial \alpha}{r \partial \varphi} \frac{z}{y} \right); \quad (5)$$

$$H_z = D \left( \frac{\partial \alpha}{r \partial \varphi} \frac{z}{y} - \frac{\sin \gamma}{r} \alpha \frac{z}{y} - \mu \frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{y}{r} \right); \quad (6)$$

$$H_{\varphi z} = -H_{z\varphi} = \frac{1}{2} D(1-\mu) \left( \frac{\partial \alpha_y}{r \partial \varphi} - \frac{\partial \alpha_z}{\partial z} + \frac{\sin \gamma}{r} \alpha_z \right); \quad (7)$$

$$N_z = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial W}{\partial z} + \mu \frac{\partial V}{r \partial \varphi} + \mu \frac{\cos \gamma}{r} U + \mu \frac{\sin \gamma}{r} W \right); \quad (8)$$

$$N_y = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial V}{r \partial \varphi} + \frac{\cos \gamma}{r} U + \frac{\sin \gamma}{r} W + \mu \frac{\partial W}{\partial z} \right); \quad (9)$$

$$N_{yz} = N_{zy} = \frac{Eh}{2(1+\mu)} \left( \frac{\partial W}{r \partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\sin \gamma}{r} V \right); \quad (10)$$

$$N_{xz} = \frac{k^2 Eh}{2(1+\mu)} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \alpha_y \right); \quad (11)$$

$$N_{x\varphi} = \frac{k^2 Eh}{2(1+\mu)} \left( \frac{\partial U}{r \partial \varphi} - \frac{\cos \gamma}{r} V - \alpha_z \right). \quad (12)$$

Здесь  $D = Eh^3/12(1-\mu^2)$  — цилиндрическая жесткость;

$h$  — толщина оболочки.

Выражения (11), (10), (8), (5) и (7) позволяют получить первые пять дифференциальных уравнений, описывающих колебания оболочки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial z} &= -\alpha_y + \frac{2(1+\mu)}{k^2 Ehr} (N_{xz} r); \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= \frac{\sin \gamma}{r} V - \frac{\partial W}{r \partial \varphi} + \frac{2(1+\mu)}{Ehr} (N_{yz} r); \\ \frac{\partial W}{\partial z} &= -\mu \frac{\cos \gamma}{r} U - \mu \frac{\partial V}{r \partial \varphi} - \mu \frac{\sin \gamma}{r} W + \frac{1-\mu^2}{Ehr} (N_z r); \\ \frac{\partial \alpha_y}{\partial z} &= \frac{\mu}{r} \frac{\partial \alpha_z}{\partial \varphi} - \mu \frac{\sin \gamma}{r} \alpha_y + \frac{1}{Dr} (H_y r); \\ \frac{\partial \alpha_z}{\partial z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha_y}{\partial \varphi} + \frac{\sin \gamma}{r} \alpha_z + \frac{1}{D(1-\mu)r} (H_{z\varphi} r). \end{aligned} \quad (13)$$

Для получения замкнутой системы уравнений рассмотрим условия равновесия элемента оболочки. Он изображен на рис.1. На этом же рисунке показаны действующие на элемент динамические усилия и статические силы  $N_z^{cm}, N_y^{cm}$ . При выводе уравнений принимается, что в процессе колебаний статические силы остаются постоянными как по величине, так и по направлению [1].

Проецируя силы и моменты на оси координат, после несложных преобразований получаем еще пять дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(N_{xz}r)}{\partial z} &= \left( \frac{m^2}{r} \frac{k^2 Eh}{2(1+\mu)} + Eh \frac{\cos^2 \gamma}{r} \right) U + hr\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{k^2 Eh}{2(1+\mu)} \frac{\partial \alpha_z}{\partial \varphi} + \\ &+ Eh \frac{\sin \gamma \cos \gamma}{r} W + \left( Eh \frac{\cos \gamma}{r} + \frac{k^2 Eh \cos \gamma}{2(1+\mu)r} \right) \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \mu \frac{\cos \gamma}{r} (N_z r); \\ \frac{\partial(N_{yz}r)}{\partial z} &= -\frac{\cos \gamma}{r} \left( Eh + \frac{k^2 Eh}{2(1+\mu)} \right) \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{k^2 Eh}{2(1+\mu)} \cos \gamma \alpha_z - \frac{\sin \gamma}{r} Eh \frac{\partial W}{\partial \varphi} - \\ &- \frac{Eh}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{k^2 Eh \cos^2 \gamma}{2(1+\mu)r} V + hr\rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\mu}{r} \frac{\partial(N_z r)}{\partial \varphi} - \frac{\sin \gamma}{r} (N_{yz}r); \\ \frac{\partial(N_z r)}{\partial z} &= Eh \frac{\sin \gamma \cos \gamma}{r} U + Eh \frac{\sin^2 \gamma}{r} W + hr\rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \\ &+ Eh \frac{\sin \gamma}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \mu \frac{\sin \gamma}{r} (N_z r) - \frac{1}{r} \frac{\partial N_{yz}}{\partial \varphi}; \\ \frac{\partial(H_y r)}{\partial z} &= \left[ D(1-\mu^2) \frac{\sin^2 \gamma}{r} + N_z^{cr} r \right] \alpha_y + \frac{h^3 r}{12} \rho \frac{\partial^2 \alpha_y}{\partial t^2} - \\ &D(1-\mu^2) \frac{\sin \gamma}{r} \frac{\partial \alpha_z}{\partial \varphi} + \mu \frac{\sin \gamma}{r} (H_y r) + (N_{xz} r) + \frac{\partial(H_z \varphi r)}{r \partial \varphi}; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{\partial(H_{z\varphi r})}{\partial z} = -\frac{k^2 E h}{2(1+\mu)} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + D(1-\mu^2) \frac{\sin \gamma}{r} \frac{\partial \alpha_y}{\partial \varphi} + \left[ \frac{k^2 E h r}{2(1+\mu)} + N_{\varphi r}^{\text{сг}} \right] \alpha_z -$$

$$-\frac{1}{r} D(1-\mu^2) \frac{\partial^2 \alpha_z}{\partial \varphi^2} + \frac{h^3 r}{12} \rho \frac{\partial^2 \alpha_z}{\partial t^2} + \frac{k^2 E h}{2(1+\mu)} \cos \gamma V + \mu \frac{\partial(H_{y r})}{r \partial \varphi} - \frac{\sin \gamma}{r} (H_{z\varphi r}).$$

Представим в соответствии с [2] усилия и перемещения в виде:

$$\begin{aligned} U &= q_{x\lambda} e^{i\text{m}\varphi} e^{i\text{p}t}; V = q_{y\lambda} e^{i\text{m}\varphi} e^{i\text{p}t}; W = q_{z\lambda} e^{i\text{m}\varphi} e^{i\text{p}t}; \alpha_z = \beta_{z\lambda} e^{i\text{m}\varphi} e^{i\text{p}t}; \\ \alpha_y &= \beta_{y\lambda} e^{i\text{m}\varphi} e^{i\text{p}t}; N_{xz} = Q_{x\lambda} e^{i\text{m}\varphi} e^{i\text{p}t}; N_{yz} = Q_{y\lambda} e^{i\text{m}\varphi} e^{i\text{p}t}; \\ N_z &= Q_{z\lambda} e^{i\text{m}\varphi} e^{i\text{p}t}; H_y = M_{y\lambda} e^{i\text{m}\varphi} e^{i\text{p}t}; H_{z\varphi} = M_{z\lambda} e^{i\text{m}\varphi} e^{i\text{p}t}, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $q_{x\lambda}, q_{y\lambda}, q_{z\lambda}, \beta_{y\lambda}, \beta_{z\lambda}$  – комплексные амплитуды волн линейных и угловых смещений;  $Q_{x\lambda}, Q_{y\lambda}, Q_{z\lambda}, M_{y\lambda}, M_{z\lambda}$  – комплексные амплитуды волн сил и моментов;  $p$  – круговая частота колебаний;  $m$  – число волн деформаций по окружности оболочки;  $i$  – мнимая единица.

Подставляя соотношения (15) в выражения (13) и (14), получаем замкнутую систему дифференциальных уравнений, описывающих колебания конической оболочки в рамках гипотез Тимошенко. В матричной форме она имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \{q\} &= [A_{11}] \{Q\} + [A_{12}] \{q\}; \\ \frac{d}{dz} \{Q\} &= [A_{21}] \{Q\} + [A_{22}] \{q\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь  $\{q\} = \{q_x, q_y, q_{z\lambda}, \beta_y, \beta_z\}^T$  – вектор комплексных амплитуд волн перемещений;  $\{Q_\lambda\} = \{Q_{x\lambda}, Q_{y\lambda}, Q_{z\lambda}, M_{y\lambda}, M_{z\lambda}\}^T$  – вектор комплексных амплитуд волн усилий;

$$[A_{11}] = \begin{bmatrix} 2(1+\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k^2 E h r & & & & \\ 0 & \frac{1-\mu^2}{E h r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{D r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\mu)}{E h r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{D(1-\mu)r} \end{bmatrix}; \quad [A_{22}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix};$$

$$[A_{21}] = -[A_{12}]^T = \begin{bmatrix} 0 & \mu \frac{\cos \gamma}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu \frac{\sin \gamma}{r} & 0 & -i \frac{m}{r} & 0 \\ 1 & 0 & \mu \frac{\sin \gamma}{r} & 0 & i \frac{m}{r} \\ 0 & -i \frac{m}{r} \mu & 0 & -\frac{\sin \gamma}{r} & 0 \\ 0 & 0 & i \frac{m}{r} \mu & 0 & -\frac{\sin \gamma}{r} \end{bmatrix};$$

$$[C_{11}] = \begin{bmatrix} \frac{m^2}{r} \frac{k^2 Eh}{2(1+\mu)} + Eh \frac{\cos^2 \gamma}{r} - hr \rho \rho^2 & Eh \frac{\sin \gamma \cos \gamma}{r} \\ Eh \frac{\sin \gamma \cos \gamma}{r} & Eh \frac{\sin^2 \gamma}{r} - hr \rho \rho^2 \end{bmatrix};$$

$$[C_{12}] = -[C_{21}]^T = \begin{bmatrix} 0 & i \frac{m}{r} \cos \gamma \left( Eh + \frac{k^2 Eh}{2(1+\mu)} \right) & im \frac{k^2 Eh}{2(1+\mu)} \\ 0 & i \frac{m}{r} Eh \sin \gamma & 0 \end{bmatrix};$$

$$[C_{22}] = \begin{bmatrix} D(1-\mu^2) \frac{\sin^2 \gamma}{r} + N_{zCT} r - \frac{h^3 r}{12} \rho \rho^2 & 0 & -imD(1-\mu^2) \frac{\sin \gamma}{r} \\ 0 & \frac{m^2}{r} Eh + \frac{k^2 Eh}{2(1-\mu)} \times \times \cos^2 \gamma - hr \rho \rho^2 & \frac{k^2 Eh}{2(1+\mu)} \cos \gamma \\ imD(1-\mu^2) \frac{\sin \gamma}{r} & \frac{k^2 Eh}{2(1+\mu^2)} \cos \gamma & \frac{m^2}{r} D(1-\mu^2) + \frac{k^2 Ehr}{2(1+\mu)} + N_{yCT} r - \frac{h^3 r}{12} \rho \rho^2 \end{bmatrix};$$

Матрица жесткостей волнового конечного элемента устанавливает связь:

$$\begin{Bmatrix} Q_1^{(k)} \\ Q_2^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}^{(k)} & H_{12}^{(k)} \\ H_{21}^{(k)} & H_{22}^{(k)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_1^{(k)} \\ q_2^{(k)} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} Q_{b1}^{(k)} \\ Q_{b2}^{(k)} \end{Bmatrix}. \quad (17)$$

Здесь  $\begin{Bmatrix} Q_1^{(k)} \\ Q_2^{(k)} \end{Bmatrix}$ ,  $\begin{Bmatrix} Q_{b1}^{(k)} \\ Q_{b2}^{(k)} \end{Bmatrix}$  – векторы комплексных амплитуд волн реакций соответственно на внутренней и внешней границах  $k$ -го элемента;  
 $\begin{Bmatrix} q_1^{(k)} \\ q_2^{(k)} \end{Bmatrix}$  – векторы комплексных амплитуд волн перемещений соответственно внутренней и внешней границ  $k$ -го элемента;  
 $\begin{Bmatrix} Q_{b1}^{(k)} \\ Q_{b2}^{(k)} \end{Bmatrix}$  – векторы комплексных амплитуд волн приведенной соответственно к внутренней и наружной границам внешней нагрузки действующей на  $k$ -ый элемент;

$$[H^{(k)}] = \begin{bmatrix} H_{11}^{(k)} & H_{12}^{(k)} \\ H_{21}^{(k)} & H_{22}^{(k)} \end{bmatrix} \text{ – матрица комплексных жесткостей } k\text{-го элемента.}$$

При выполнении дискретизации системы любая из матриц волновых жесткостей преобразуется в сумму:

$$\begin{bmatrix} H_{11}^{(k)} & H_{12}^{(k)} \\ H_{21}^{(k)} & H_{22}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^{(k)} & D_{12}^{(k)} \\ D_{21}^{(k)} & D_{22}^{(k)} \end{bmatrix} - p^2 \begin{bmatrix} M_{11}^{(k)} & M_{12}^{(k)} \\ M_{21}^{(k)} & M_{22}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

где  $[D^{(k)}] = \begin{bmatrix} D_{11}^{(k)} & D_{12}^{(k)} \\ D_{21}^{(k)} & D_{22}^{(k)} \end{bmatrix}$  и  $[M^{(k)}] = \begin{bmatrix} M_{11}^{(k)} & M_{12}^{(k)} \\ M_{21}^{(k)} & M_{22}^{(k)} \end{bmatrix}$  – комплексные матрицы соответственно статических жесткостей и обобщенных масс  $k$ -го элемента;  $p$  – круговая частота колебаний.

Рассмотрим метод определения матриц  $[H^{(k)}]$ ,  $[D^{(k)}]$  и  $[M^{(k)}]$ . Запишем общее решение системы (16)

$$\begin{Bmatrix} q^{(k)} \\ Q^{(k)} \end{Bmatrix} = C_1^{(k)} \{P_1^{(k)}\} + \dots + C_n^{(k)} \{P_n^{(k)}\} + \{P_o^{(k)}\} \quad (19)$$

где  $C_1^{(k)}, C_2^{(k)}, \dots, C_n^{(k)}$  – неизвестные постоянные;  $n$  – порядок системы (16);  $\{P_1^{(k)}\}, \{P_2^{(k)}\}, \dots, \{P_n^{(k)}\}$  – линейно - независимые частные реше-



ния однородной системы дифференциальных уравнений, соответствующей системе (16);  $\{P_0^{(k)}\}$  – частное решение системы (16).

Преобразуем равенство (19) к следующему виду:

$$\begin{Bmatrix} q \\ Q \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} P_1^{(k)} & P_2^{(k)} & \dots & P_n^{(k)} \end{bmatrix} \{C_1^k, C_2^k \dots C_n^k\}^T + \{P_0^{(k)}\}. \quad (20)$$

Будем искать частные решения  $\{P_j^{(k)}\}$  таким образом, чтобы на начальном радиусе интегрирования  $r = r_1$  было справедливо:

$$\begin{bmatrix} P_1^{(k)} & P_2^{(k)} & \dots & P_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}; \quad \{P_0^{(k)}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Тогда из (20) следует, что для внутренней границы элемента выполняется

$$\{C_1^k, C_2^k \dots C_n^k\}^T = \begin{Bmatrix} q_1^{(k)} \\ Q_1^{(k)} \end{Bmatrix}. \quad (21)$$

Запишем общее решение (20) для периферийной границы  $k$ -го элемента ( $r=r_2$ ). Учтя равенство (21), имеем:

$$\begin{Bmatrix} q \\ Q \end{Bmatrix}_2^{(k)} = \begin{bmatrix} P_1^{(k)} & P_2^{(k)} & \dots & P_n^{(k)} \end{bmatrix}_{r=r_2} \begin{Bmatrix} q_1^{(k)} \\ Q_1^{(k)} \end{Bmatrix} + \{P_0^{(k)}\}_{r_2}. \quad (22)$$

Обозначим:

$$\begin{bmatrix} P_1^{(k)} & P_2^{(k)} & \dots & P_n^{(k)} \end{bmatrix}_{r=r_2} = [T^{(k)}] = \begin{bmatrix} T_{11}^{(k)} & T_{12}^{(k)} \\ T_{21}^{(k)} & T_{22}^{(k)} \end{bmatrix}; \quad \{P_0^{(k)}\} = \begin{Bmatrix} b_1^{(k)} \\ b_2^{(k)} \end{Bmatrix}.$$

Тогда равенство (22) примет вид:

$$\begin{Bmatrix} q \\ Q \end{Bmatrix}_2^{(k)} = \begin{bmatrix} T_{11}^{(k)} & T_{12}^{(k)} \\ T_{21}^{(k)} & T_{22}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1^{(k)} \\ Q_1^{(k)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_1^{(k)} \\ b_2^{(k)} \end{Bmatrix}. \quad (23)$$

При вычислении матрицы  $[T^{(k)}]$  происходит быстрое затухание краевых эффектов, вследствие чего частные решения  $\{P_1^{(k)}\}$ ,  $\{P_2^{(k)}\}$ , ...,  $\{P_n^{(k)}\}$  становятся линейно-зависимыми. Это приводит к появлению

малых разностей при оперировании с блоками  $\begin{bmatrix} T & \\ & i j \end{bmatrix}$  матрицы  $[T^{(k)}]$ .

Для преодоления данной проблемы необходимо при интегрировании системы (16) выполнять предложенную С.К. Годуновым ортогонализацию [3]. После ее применения матрица  $[T^{(k)}]$  в равенстве (23) записывается следующим образом:

$$[T^{(k)}] = \begin{bmatrix} z_{11}^{(k)} \omega_q^{(k)} & z_{12}^{(k)} \Omega_Q^{(k)} \\ z_{21}^{(k)} \omega_q^{(k)} & z_{22}^{(k)} \Omega_Q^{(k)} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

где  $\begin{bmatrix} \omega_q^{(k)} \\ \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} \Omega_Q^{(k)} \\ \end{bmatrix}$  – верхние треугольные матрицы;

$[z_{11}^{(k)}]$ ,  $[z_{12}^{(k)}]$ ,  $[z_{21}^{(k)}]$ ,  $[z_{22}^{(k)}]$  – квадратные матрицы, полученные после ортогонализации матриц  $\begin{bmatrix} T & \\ & i j \end{bmatrix}$ .

Для построения матрицы волновых динамических жесткостей представим равенство (23) в виде:

$$\begin{cases} \{q_2^{(k)}\} = [z_{21}^{(k)}] \begin{bmatrix} \omega_q^{(k)} \\ \end{bmatrix} \{q_1^{(k)}\} + [z_{22}^{(k)}] \begin{bmatrix} \Omega_Q^{(k)} \\ \end{bmatrix} \{Q_1^{(k)}\} + \{b_2^{(k)}\}; \\ \{Q_2^{(k)}\} = [z_{21}^{(k)}] \begin{bmatrix} \omega_q^{(k)} \\ \end{bmatrix} \{q_1^{(k)}\} + [z_{22}^{(k)}] \begin{bmatrix} \Omega_Q^{(k)} \\ \end{bmatrix} \{Q_1^{(k)}\} + \{b_2^{(k)}\}. \end{cases}$$

Исключая из правой части этих уравнений вектор  $\{Q_1^{(k)}\}$ , находим

искомое соотношение (17), где

$$\begin{cases} [H_{11}^{(k)}] = \begin{bmatrix} \Omega_Q^{(k)} \\ \end{bmatrix}^{-1} [z_{12}^{(k)}]^{-1} [z_{11}^{(k)}] \begin{bmatrix} \omega_q^{(k)} \\ \end{bmatrix}; & [H_{22}^{(k)}] = [z_{22}^{(k)}] [z_{12}^{(k)}]^{-1}; \\ [H_{21}^{(k)}] = \left( [z_{21}^{(k)}] - [z_{22}^{(k)}] [z_{12}^{(k)}]^{-1} [z_{11}^{(k)}] \right) \begin{bmatrix} \omega_q^{(k)} \\ \end{bmatrix}; \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{matrix} Q \\ b_1 \end{matrix} \right\}^{(k)} = - \left[ \Omega_Q^{(k)} \right]^{-1} \left[ z_{12}^{(k)} \right]^{-1} \left\{ b_1^{(k)} \right\}; \quad \left[ H_{12}^{(k)} \right] = - \left[ \Omega_Q^{(k)} \right] \left[ z_{12}^{(k)} \right];$$

$$\left\{ \begin{matrix} Q \\ b_2 \end{matrix} \right\}^{(k)} = - \left\{ b_2^{(k)} \right\} + \left[ z_{22}^{(k)} \right] \left[ z_{12}^{(k)} \right]^{-1} \left\{ b_1^{(k)} \right\}.$$

Коэффициенты матрицы  $[H^{(k)}]$  являются функциями от частоты колебаний  $p$ . Проведем дискретизацию элемента, сосредоточив его массу на внешней и внутренней границах. Для этого вычислим матрицу  $[H^{(k)}]$  для частот  $p=p_0=0$  и  $p=p_1$ . В соответствии с (18) имеем

$$\begin{bmatrix} D_{11}^{(k)} & D_{12}^{(k)} \\ D_{21}^{(k)} & D_{22}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}^{(k)}(p_0) & H_{12}^{(k)}(p_0) \\ H_{21}^{(k)}(p_0) & H_{22}^{(k)}(p_0) \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} M_{11}^{(k)} & M_{12}^{(k)} \\ M_{21}^{(k)} & M_{22}^{(k)} \end{bmatrix} = \frac{1}{P_1} \left( \begin{bmatrix} D_{11}^{(k)} & D_{12}^{(k)} \\ D_{21}^{(k)} & D_{22}^{(k)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{11}^{(k)}(p_1) & H_{12}^{(k)}(p_1) \\ H_{21}^{(k)}(p_1) & H_{22}^{(k)}(p_1) \end{bmatrix} \right).$$

При расчленении конструкции на достаточно большое число элементов матрица обобщенных масс для любого из них практически не зависит от величины частоты  $p_1$ , если последняя выбрана из представляющего практический интерес диапазона. Последнее связано с тем, что в этом случае  $p_1$  значительно меньше низшей собственной частоты элемента и ее изменение фактически не отражается на его форме колебаний.

Для подтверждения корректности разработанного конечного элемента были проведены исследования колебаний трех оболочек. Последние имели одинаковые геометрические размеры за исключением толщин, которые соответственно составляли 5 мм, 40 мм и 80 мм. Результаты расчетов с использованием модели Тимошенко (программа "Динамика") представлены в табл.1. - табл.3. В этих же таблицах приведены собственные частоты оболочек, рассчитанные с помощью конечно-элементного комплекса ANSYS. При выполнении расчетов комплексом ANSYS использовались два типа конечных элементов: оболочечный (shell) и объемный (solid).

Таблица 1 - Собственные частоты колебаний конической оболочки с толщиной  $h = 80$  мм

Программа	Модель	Число волн деформаций $m$			
		2	3	4	5
ДИНАМИКА	Тимошенко	388	1054	1908	2902
ANSYS	Shell	384	1047	1900	2905
ANSYS	Solid	385	1041	1896	2900

Таблица 2 - Собственные частоты колебаний конической оболочки с толщиной  $h = 40$  мм

Программа	Модель	Число волн деформаций $m$			
		2	3	4	5
ДИНАМИКА	Тимошенко	202	558	1046	1647
ANSYS	Shell	200	558	1046	1646
ANSYS	Solid	202	562	1058	1674

Таблица 3 - Собственные частоты колебаний конической оболочки с толщиной  $h = 5$  мм

Программа	Модель	Число волн деформаций $m$			
		2	3	4	5
ДИНАМИКА	Тимошенко	26,2	72,2	138,0	222,1
ДИНАМИКА	Кирхг.-Лява	26,8	73,1	138,5	222,8
ANSYS	Solid	26,0	72,0	137,3	221,0

Из сравнения приведенных данных видно, что рассчитанные обеими программами собственные частоты хорошо согласуются. Для оболочки с толщиной  $h=5$  мм ( $h/r = 0,0125$ ) расчеты выполнялись также с применением модели Кирхгофа-Лява.

#### Список литературы

1. Ермаков А.И., Иванов В.Л. К расчетной модели влияния вращения на колебания диска // Проблемы прочности .- 1983, № 6 .-с.98-101.
2. Иванов В.П. Колебания рабочих колес турбомашин . М.: Машиностроение , 1983. - 224с.
3. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений . - Успехи мат. Наук , 1961, т.16, вып.3. - с.171-174.