ОБЪЕМНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИСКА

Ермаков А.И.
Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара

Динамическую модель диска построим в цилиндрической системе координат для объемного напряженного состояния. Поскольку диск обладает поворотной симметрией, амплитудные во времени перемещения в его точках представим в виде

$$U=q_x\,e^{im\varphi};\quad V=q_y\,e^{im\varphi};\quad W=q_z\,e^{im\varphi}. \tag{1}$$

Здесь q_x, q_y, q_z – комплексные амплитуды волн перемещений, которые являются функциями координат x и z.

Для стационарной постановки задачи смещения U, V и W могут быть найдены из выражений [1]:

$$q_x=\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x\,\partial z}+i\frac{m}{r}\Psi_2;$$

$$q_y=i\frac{m}{r}\left(\Phi+\frac{\partial\Psi_1}{\partial z}\right)-\frac{\partial\Psi_2}{\partial x}; \tag{2}$$

$$q_z=\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial z^2}+\frac{\lambda^2}{c_2^2}\Psi_1.$$

Здесь Φ, Ψ_1, Ψ_2 – функции, являющиеся решениями уравнений:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}-\left(\frac{m^2}{r^2}-\frac{\lambda^2}{c_1^2}\right)\Phi=0;$$

$$\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_1}{\partial x}+\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x^2}-\left(\frac{m^2}{r^2}-\frac{\lambda^2}{c_2^2}\right)\Psi_1=0; \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_2}{\partial x}+\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial z^2}-\left(\frac{m^2}{r^2}-\frac{\lambda^2}{c_2^2}\right)\Psi_2=0,$$

где c_1, c_2 –безразмерные скорости распространения изменений объема и формы, определяемые по формуле:

$c_1 = \sqrt{\dfrac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}}$; $c_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2(1+\mu)}}$; λ – безразмерная частота колебаний, вычисленная как $\lambda=2\pi f R_д$; f – физическая частота колебаний; $R_д$ – периферийный радиус диска; $c = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$.

Решение уравнений (2) в соответствии с [2] будем искать в виде:

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} R_{0n}^{(1)} \cos\frac{n\pi z}{h_0} + \sum_{k=0}^{\infty} F_{0k}^{(1)} \chi_k^{(1)};$$

$$\Psi_1 = -\sum_{n=0}^{\infty} R_{1n}^{(1)} \sin\frac{n\pi z}{h_0} + \sum_{k=0}^{\infty} F_{1k}^{(1)} \chi_k^{(1)}; \qquad (4)$$

$$\Psi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} R_{2n}^{(1)} \cos\frac{n\pi z}{h_0} + \sum_{k=0}^{\infty} F_{2k}^{(1)} \chi_k^{(1)},$$

где
$$R_{0n}^{(1)} = A_n^{(1)} \frac{I_m(x\gamma_n)}{I_m(r_2\gamma_n)} + B_n^{(1)} \frac{K_m(x\gamma_n)}{K_m(r_1\gamma_n)};$$

$$R_{1n}^{(1)} = A_{1n}^{(1)} \frac{I_m(x\delta_n)}{I_m(r_2\gamma_n)} + B_{1n}^{(1)} \frac{K_m(x\delta_n)}{K_m(r_1\gamma_n)};$$

$$R_{2n}^{(1)} = A_{2n}^{(1)} \frac{I_m(x\delta_n)}{I_m(r_2\gamma_n)} + B_{2n}^{(1)} \frac{K_m(x\delta_n)}{K_m(r_1\gamma_n)};$$

$$F_{0k}^{(1)} = C_k^{(1)} e^{\omega_k (z-h_0)} + D_k^{(1)} e^{-\omega_k z};$$

$$F_{1k}^{(1)} = C_{1k}^{(1)} e^{\Omega_k z} + D_{1k}^{(1)} e^{-\Omega_k z};$$

$$F_{2k}^{(1)} = C_{2k}^{(1)} e^{\Omega_k z} + D_{2k}^{(1)} e^{-\Omega_k z};$$

$\chi_k^{(1)} = E_k^{(1)} J_k(x P_k^{(1)}) + G_k^{(1)} Y_k(x P_k^{(1)})$; J_k, Y_k – функции Бесселя k-го порядка первого и второго родов соответственно; $\gamma_n^2=(n\pi/h_o)^2-(\lambda/c_1)^2$; $\delta_n^2==(n\pi/h_o)^2-(\lambda/_{c2})$; $h_0=h/R_д$; h – толщина цилиндра;$\omega_k^2=(P_k^{(1)})^2-(\lambda/c_1)^2$; $\Omega_k^2=(P_k^{(1)})^2-(\lambda/c_2)^2$; $_k$, K_k – модифицированные функции Бесселя k-го порядка первого и второго родов соответственно; $A_n^{(1)}$, $B_n^{(1)}$, $A_{1n}^{(1)}$, $B_{1n}^{(1)}$, $A_{2n}^{(1)}$, $B_{2n}^{(1)}$, $C_k^{(1)}$, $D_k^{(1)}$, $C_{1k}^{(1)}$, $D_{1k}^{(1)}$, $C_{2k}^{(1)}$, $D_{2k}^{(1)}$- произвольные постоянные; $E_k^{(1)}=P_k^{(1)} Y_k'(r_2 P_k^{(1)})$; $G_k^{(1)}=-P_k^{(1)} J_k'(r_2 P_k^{(1)})$; $P_k^{(1)}$ – k-ый в порядке возрастания положительный корень уравнения:

$$\left(P_j^{(1)}\right)^2 \left[Y'_m\left(r_1 P_j^{(1)}\right) J'_m\left(r_2 P_j^{(1)}\right) - J'_m\left(r_1 P_j^{(1)}\right) Y'_m\left(r_2 P_j^{(1)}\right)\right] = 0;$$

r_1, r_2 – внутренний и наружный относительные радиусы конечного элемента.

В соответствии с формой записи общего решения, напряжения на боковых и торцевых поверхностях диска представляются следующим образом:

$$\sigma_z = 0; \tau_{xz} = 0; \tau_{\varphi z} = 0;$$

$$\sigma_x = \sigma_x^{(1)}; \tau_{zx} = \tau_{zx}^{(1)}; \tau_{\varphi x} = \tau_{\varphi x}^{(1)}.$$

Отмеченный подход позволяет свести задачу о колебаниях диска к решению следующей системы восьми последовательностей линейных алгебраических уравнений:

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\mu}{1-2\mu}\frac{\lambda^2}{c_1^2}+\left(\frac{n\pi}{h_0}\right)^2\right]\frac{a_{\gamma np}}{I_m(r_2\gamma_n)}A_n^{(1)}-\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\mu}{1-2\mu}\frac{\lambda^2}{c_1^2}+\left(\frac{n\pi}{h_0}\right)^2\right]\times$$

$$\times\frac{b_{\gamma np}}{K_m(r_1\gamma_n)}B_n^{(1)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\pi}{h_0}\delta_n^2\frac{a_{\delta np}}{I_m(r_2\delta_n)}A_{1n}^{(1)}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\pi}{h_o}\delta_n^2\frac{b_{\delta np}}{K_m(r_1\delta_n)}B_{1n}^{(1)}+\left[(\omega_p^2-\frac{\mu}{1-2\mu}\frac{\lambda^2}{c_1^2})e^{-\omega_p h_o}-\right.$$

$$-\Omega_p\omega_p \frac{\Omega_p^2+\frac{\lambda^2}{c_2^2}}{\Omega_p^2+\frac{\lambda^2}{2c_2^2}}(t_{1p}-t_{3p})\Bigg]C_p^{(1)}+\Bigg[\Omega_p\omega_p \frac{\Omega_p^2+\frac{\lambda^2}{c_2^2}}{\Omega_p^2+\frac{\lambda_2^2}{2c_2^2}}(t_{2p}-$$

$$-t_{4p})+(\omega_p^2-\frac{\mu}{1-2\mu}\frac{\lambda^2}{c_1^2})]D_p^{(1)}=0;$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{\mu}{1-2\mu}\frac{\lambda^2}{c_1^2}+\left(\frac{n\pi}{h_0}\right)^2\right]\frac{a_{\gamma np}}{I_m(r_2\gamma_n)}A_n^{(1)}-$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{\mu}{1-2\mu}\frac{\lambda^2}{-_1^2}+\left(\frac{n\pi}{h_0}\right)^2\right]\frac{b_{\gamma np}}{K_m(r_1\gamma_n)}B_n^{(1)}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n\pi}{h_0}\delta_n^2\frac{a_{\delta np}}{I_m(r_2\delta_n)}A_{1n}^{(1)}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n\pi}{h_0}\delta_n^2\times$$

$$\times\frac{b_{\delta np}}{K_m(r_1\delta_n)}B_{1n}^{(1)}+\left[\left(\omega_p^2-\frac{\mu}{1-2\mu}\frac{\lambda^2}{c_1^2}\right)-\Omega_p\omega_p\frac{\Omega_p^2+\frac{\lambda^2}{c_2^2}}{\Omega_p^2+\frac{\lambda^2}{2c_2^2}}\times\right.$$

$$\left.\times\left(t_{1p}-t_{3p}e^{-\Omega_p h_0}\right)\right]C_p^{(1)}+\left[\left(\omega_p^2-\frac{\mu}{1-2\mu}\frac{\lambda^2}{c_1^2}\right)e^{-\omega_p h_0}+\right.$$

$$+\Omega_p\omega_p\frac{\Omega_p^2+\dfrac{\lambda^2}{c_2^2}}{\Omega_p^2+\dfrac{\lambda^2}{2c_2^2}}\left(t_{2p}-t_{4p}e^{-\Omega_p h_0}\right)\Bigg]D_p^{(1)}=0.$$

$$\left(\sigma_{0x}^{(n)}\right)_1=\left\{\left[\left(\frac{m^2}{r_1^2}-\frac{\lambda^2}{2c_2^2}\right)+\left(\frac{n\pi}{h_0}\right)^2\right]\frac{I_m(r_1\gamma_n)}{I_m(r_2\gamma_n)}-\frac{\gamma_n}{r_1}\frac{I'_m(r_1\gamma_n)}{I_m(r_2\gamma_n)}\right\}$$

$$\times A_n^{(1)}+\left\{\left[\left(\frac{m^2}{r_1^2}-\frac{\lambda^2}{2c_2^2}\right)+\left(\frac{n\pi}{h_0}\right)^2\right]\cdot 1-\frac{\gamma_n}{r_1}\frac{K'_m(r_1\gamma_n)}{K_m(r_1\gamma_n)}\right\}B_n^{(1)}+$$

$$+\frac{n\pi}{h_0}\left\{\frac{\delta_n}{r_1}\frac{I'_m(r_1\delta_n)}{I_m(r_2\gamma_n)}-\left[\left(\frac{m^2}{r_1^2}-\frac{\lambda^2}{c_2^2}\right)+\left(\frac{n\pi}{h_0}\right)^2\right]\frac{I_m(r_1\delta_n)}{I_m(r_2\gamma_n)}\right\}A_{1n}^{(1)}+$$

$$+\frac{n\pi}{h_0}\left\{\frac{\delta_n}{r_1}\frac{K'_m(r_1\delta_n)}{K_m(r_1\gamma_n)}-\left[\left(\frac{m^2}{r_1^2}-\frac{\lambda^2}{c_2^2}\right)+\left(\frac{n\pi}{h_0}\right)^2\right]\frac{K_m(r_1\delta_n)}{K_m(r_1\gamma_n)}\right\}B_{1n}^{(1)}+$$

$$+i\frac{m}{r_1}\left[\delta_n\frac{I'_m(r_1\delta_n)}{I_m(r_2\gamma_n)}-\frac{1}{r_1}\frac{I_m(r_1\delta_n)}{I_m(r_2\gamma_n)}\right]A_{2n}^{(1)}+i\frac{m}{r_1}\left[\delta_n\frac{K'_m(r_1\delta_n)}{K_m(r_1\gamma_n)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{r_1}\frac{K_m(r_1\delta_n)}{K_m(r_1\gamma_n)}\right]B_{2n}^{(1)}+\sum_{p=0}^{\infty}\chi_p^{(1)}\left\{\left(\frac{m^2}{r_1^2}-\frac{\lambda^2}{2c_2^2}-\omega_p^2\right)t_{5p}-\right.$$

$$\left.\left(\frac{m^2}{r_1^2}-\frac{\lambda^2}{c_2^2}-\Omega_p^2\right)\times\frac{\Omega_p\omega_p}{\Omega_p^2+\dfrac{\lambda^2}{2c_2^2}}\left(t_{1p}\,t_{9p}-t_{3p}\,t_{10p}\right)\right\}C_p^{(1)}+$$

$$+\sum_{p=0}^{\infty}\chi_p^{(1)}\left\{\left(\frac{m^2}{r_1^2}-\frac{\lambda^2}{2c_2^2}-\omega_p^2\right)t_{10p}+\left(\frac{m^2}{r_1^2}-\frac{\lambda^2}{c_2^2}-\Omega_p^2\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\Omega_p\omega_p}{\Omega_p^2+\dfrac{\lambda^2}{2c_2^2}}\left(t_{2p}\,t_{9p}-t_{4p}\,t_{10p}\right)\right\}D_p^{(1)};$$

$$\left(\tau_{0zx}^{(n)}\right)_1=-\gamma_n\frac{n\pi}{h_0}\left(1+\bar{\sigma}_x^{cm}\right)\frac{I'_m(r_1\gamma_n)}{I_m(r_2\delta_n)}A_n^{(1)}-\gamma_n\frac{n\pi}{h_0}\left(1+\bar{\sigma}_x^{\text{ст}}\right)\times$$

$$\left.\times\frac{K'_m(r_1\gamma_n)}{K_m(r_1\square_n)}\right\}B_n^{(1)}+\delta_n\left[\left(\frac{n\pi}{h_0}\right)^2\left(1+\bar{\sigma}_x^{\text{ст}}\right)-\frac{\lambda^2}{2c_2^2}\right]\frac{I'_m(r_1\delta_n)}{I_m(r_2\gamma_n)}A_{1n}^{(1)}+$$

$$+\delta_n\left[\left(\frac{n\pi}{h_0}\right)^2\left(1+\bar{\sigma}_x^{\text{ст}}\right)-\frac{\lambda^2}{2c_2^2}\right]\frac{K'_m(r_1\delta_n)}{K_m(r_1\gamma_n)}B_{1n}^{(1)}-i\frac{m}{r_1}\frac{n\pi}{h_0}\left(\frac{1}{2}+\bar{\sigma}_x^{\text{ст}}\right)\times$$

$$\times\frac{I_m(r_1\delta_n)}{I_m(r_2\gamma_n)}A_{2n}^{(1)}-i\frac{m}{r_1}\frac{n\pi}{h_0}\left(\frac{1}{2}+\bar{\sigma}_x^{\text{ст}}\right)\frac{K_m(r_1\delta_n)}{K_m(r_1\gamma_n)}B_{2n}^{(1)};$$

$$\left(\tau_{0\varphi x}^{(n)}\right)_1 = i\frac{m}{r_1}\left[\gamma_n \frac{I'_m(r_1\gamma_n)}{I_m(r_2\gamma_n)} - \frac{1}{r_1}\frac{I_m(r_1\gamma_n)}{I_m(r_2\gamma_n)}\right]A_n^{(1)} + i\frac{m}{r_1}\times$$

$$\times\left[\gamma_n \frac{K'_m(r_1\gamma_n)}{K_m(r_1\gamma_n)} - \frac{1}{r_1}\right]B_n^{(1)} + i\frac{m}{r_1}\frac{n\pi}{h_0}\left[\delta_n \frac{I'_m(r_1\delta_n)}{I_m(r_2\gamma_n)} - \frac{1}{r_1}\times\right.$$

$$\left.\frac{I_m(r_1\delta_n)}{I_m(r_2\gamma_n)}\right]A_{1n}^{(1)} + i\frac{m}{r_1}\frac{n\pi}{h_0}\left[\delta_n \frac{K'_m(r_1\delta_n)}{K_m(r_1\gamma_n)} - -\frac{1}{r_1}\frac{K_m(r_1\delta_n)}{K_m(r_1\gamma_n)}\right]\times$$

$$\times B_{1n}^{(1)} + \left[\frac{\delta_n}{r_1}\frac{I'_m(r_1\delta_n)}{I_m(r_2\gamma_n)} - \left(\frac{m^2}{r_1^2} - \frac{\lambda^2}{2c_2^2} + \frac{1}{2}\frac{n^2\pi^2}{h_0^2}\right)\frac{I_m(r_1\delta_n)}{I_m(r_2\gamma_n)}\right]\times$$

$$\times A_{2n}^{(1)} + \frac{K'_m(r_1\delta_n)\delta_n}{K_m(r_1\gamma_n)r_1} - \left(\frac{m^2}{r_1^2} - \frac{\lambda^2}{2c_2^2} + \frac{n^2\pi^2}{h_0^2 2}\right)\frac{K_m(r_1\delta_n)}{K_m(r_1\gamma_n)}\right]\times$$

$$\times B_{2n}^{(1)} - i\frac{m}{r_1^2}\sum_{p=0}^{\infty}\chi_p^{(1)}\left[t_{5p} - \frac{\omega_p\Omega_p}{\Omega_p^2 + \frac{\lambda^2}{2c_2^2}}\left(t_{1p}t_{9p} - t_{3p}t_{10p}\right)\right]C_p^{(1)} -$$

$$-i\frac{m}{r_1^2}\sum_{p=0}^{\infty}\chi_p^{(1)}\left[t_{6p} - \frac{\omega_p\Omega_p}{\Omega_p^2 + \frac{\lambda^2}{2c_2^2}}\times\left(t_{2p}t_{9p} - t_{4p}t_{10p}\right)\right]D_p^{(1)};\ (5)$$

$$\left(\sigma_{0x}^{(n)}\right)_2 = \left\{\left[\left(\frac{m^2}{r_2^2} - \frac{\lambda^2}{2c_2^2}\right) + \left(\frac{n\pi}{h_0}\right)^2\right] - \frac{\gamma_n}{r_2}\frac{I'_m(r_2\gamma_n)}{I_m(r_2\gamma_n)}\right\}A_n^{(1)} +$$

$$+\left\{\left[\left(\frac{m^2}{r_2^2}-\frac{\lambda^2}{2c_2^2}\right)+\left(\frac{n\pi}{h_0}\right)^2\right]\frac{K_m(r_2\gamma_n)}{K_m(r_1\gamma_n)}-\frac{\gamma_n}{r_2}\frac{K'_m(r_1\gamma_n)}{K_m(r_1\gamma_n)}\right\}B_n^{(1)}+$$

$$+\frac{n\pi}{h_0}\left\{\frac{I'_m(r_2\delta_n)\delta_n}{I_m(r_2\gamma_n)r_2}-\left[\left(\frac{m^2}{r_2^2}-\frac{\lambda^2}{c_2^2}\right)+\left(\frac{n\pi}{h_0}\right)^2\right]\frac{I_m(r_1\delta_n)}{I_m(r_2\gamma_n)}\right\}A_{1n}^{(1)}+$$

$$+\frac{n\pi}{h_0}\left\{\frac{K'_m(r_2\delta_n)\delta_n}{K_m(r_2\gamma_n)r_2}-\left[\left(\frac{m^2}{r_2^2}-\frac{\lambda^2}{c_2^2}\right)+\left(\frac{n\pi}{h_0}\right)^2\right]\frac{K_m(r_2\delta_n)}{K_m(r_1\gamma_n)}\right\}B_{1n}^{(1)}+$$

$$+i\frac{m}{r_2}\left[\delta_n\frac{I'_m(r_2\delta_n)}{I_m(r_2\gamma_n)}-\frac{1}{r_2}\frac{I_m(r_2\delta_n)}{I_m(r_2\gamma_n)}\right]A_{2n}^{(1)}+i\frac{m}{r_2}\left[\delta_n\frac{K'_m(r_2\delta_n)}{K_m(r_1\gamma_n)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{r_2}\frac{K_m(r_2\delta_n)}{K_m(r_1\gamma_n)}\right]B_{2n}^{(1)}+\sum_{p=0}^{\infty}\chi_p^{(1)}\left\{\left(\frac{m^2}{r_2^2}-\frac{\lambda^2}{2c_2^2}-\omega_p^2\right)t_{5p}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{m^2}{r_2^2}-\frac{\lambda^2}{c_2^2}-\Omega_p^2\right)\times\frac{\Omega_p\omega_p}{\Omega_p^2+\dfrac{\lambda^2}{2c_2^2}}\left(t_{1p}t_{9p}-t_{3p}t_{10p}\right)\right\}C_p^{(1)}+$$

$$+\sum_{p=0}^{\infty}\chi_p^{(1)}\left\{\left(\frac{m^2}{r_2^2}-\frac{\lambda^2}{2c_2^2}-\omega_p^2\right)t_{10p}+\left(\frac{m^2}{r_2^2}-\frac{\lambda^2}{c_2^2}-\Omega_p^2\right)\times\right.$$

$$\times \frac{\Omega_p \omega_p}{\Omega_p^2 + \frac{\lambda^2}{2c_2^2}} \left(t_{2p} t_{9p} - t_{4p} t_{10p} \right) \Bigg\} D_p^{(1)};$$

$$\left(\tau_{0zx}^{(n)} \right)_2 = -\gamma_n \frac{n\pi}{h_0} \left(1 + \bar{\sigma}_x^{\text{ст}} \right) \frac{I'_m(r_2\gamma_n)}{I_m(r_2\gamma_n)} A_n^{(1)} - \gamma_n \frac{n\pi}{h_0} \left(1 + \bar{\sigma}_x^{\text{ст}} \right) \times$$

$$\times \frac{K'_m(r_2\gamma_n)}{K_m(r_1\gamma_n)} \Bigg\} B_n^{(1)} + \delta_n \left[\left(\frac{n\pi}{h_0} \right)^2 \left(1 + \bar{\sigma}_x^{\text{ст}} \right) - \frac{\lambda^2}{2c_2^2} \right] \frac{I'_m(r_2\delta_n)}{I_m(r_2\gamma_n)} \times$$

$$\times A_{1n}^{(1)} + \delta_n \left[\left(\frac{n\pi}{h_0} \right)^2 \left(1 + \bar{\sigma}_x^{\text{ст}} \right) - \frac{\lambda^2}{2c_2^2} \right] \times \frac{K'_m(r_2\delta_n)}{K_m(r_1\gamma_n)} B_{1n}^{(1)} - i \frac{m}{r_2} \frac{n\pi}{h_0} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2} + \bar{\sigma}_x^{\text{ст}} \right) \frac{I_m(r_2\delta_n)}{I_m(r_2\gamma_n)} A_{2n}^{(1)} - i \frac{m}{r_2} \frac{n\pi}{h_0} \left(\frac{1}{2} + \bar{\sigma}_x^{\text{ст}} \right) \frac{K_m(r_2\delta_n)}{K_m(r_1\gamma_n)} B_{2n}^{(1)};$$

$$\left(\tau_{0\varphi x}^{(n)} \right)_2 = i \frac{m}{r_2} \left[\gamma_n \frac{I'_m(r_2\gamma_n)}{I_m(r_2\gamma_n)} - \frac{1}{r_2} \right] A_n^{(1)} + i \frac{m}{r_2} \left[\gamma_n \frac{K'_m(r_2\gamma_n)}{K_m(r_1\gamma_n)} - \right.$$

$$\left. - \frac{K_m(r_2\gamma_n)}{K_m(r_1\gamma_n) r_2} \right] B_n^{(1)} + i \frac{n\pi m}{h_0 r_2} \left[\frac{I'_m(r_2\delta_n)\delta_n}{I_m(r_2\gamma_n)} - \frac{I_m(r_2\delta_n)}{I_m(r_2\gamma_n) r_2} \right] A_{1n}^{(1)} +$$

$$+ i \frac{m}{r_2} \frac{n\pi}{h_0} \left[\delta_n \frac{K'_m(r_2\delta_n)}{K_m(r_1\gamma_n)} - \frac{1}{r_2} \frac{K_m(r_2\delta_n)}{K_m(r_1\gamma_n)} \right] B_{1n}^{(1)} + \left[\frac{\delta_n}{r_2} \frac{I'_m(r_2\delta_n)}{I_m(r_2\gamma_n)} - \right.$$

$$-\left(\frac{m^2}{r_2^2}-\frac{\lambda^2}{2c_2^2}+\frac{1}{2}\,\frac{n^2\pi^2}{h_0^2}\right)\frac{I_m(r_2\delta_n)}{I_m(r_2\gamma_n)}\Bigg]A_{2n}^{(1)}+\left[\frac{\delta_n}{r_2}\frac{K'_m(r_2\delta_n)}{K_m(r_1\gamma_n)}-\left(\frac{m^2}{r_2^2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\lambda^2}{2c_2^2}+\frac{1}{2}\,\frac{n^2\pi^2}{h_0^2}\right)\frac{K_m(r_2\delta_n)}{K_m(r_1\gamma_n)}\right]B_{2n}^{(1)}-i\frac{m}{r_2^2}\sum_{p=0}^{\infty}\chi_p^{(1)}\Bigg[t_{5p}-$$

$$-\frac{\omega_p\Omega_p}{\Omega_p^2+\dfrac{\lambda^2}{2c_2^2}}\left(t_{1p}\,t_{9p}-t_{3p}\,t_{10p}\right)\Bigg]C_p^{(1)}-i\frac{m}{r_2^2}\sum_{p=0}^{\infty}\chi_p^{(1)}\Bigg[t_{6p}-$$

$$-\frac{\omega_p\Omega_p}{\Omega_p^2+\dfrac{\lambda^2}{2c_2^2}}\times\left(t_{2p}\,t_{9p}-t_{4p}\,t_{10p}\right)\Bigg]D_p^{(1)}.$$

Данная система получена на базе закона Гука, формул Коши, соотношений (2), (3) и (4). В напряжениях, входящих в ее уравнения, нижний индекс 1 означает принадлежность к внутренней боковой поверхности диска, имеющей относительный радиус r_1, а индекс 2 – к периферийной поверхности с относительным радиусом r_2. При выводе системы (5) комплексные амплитуды волн нормальных и касательных напряжений на боковых поверхностях представлялись в виде следующих тригонометрических сумм:

$$\sigma_x=\sigma_{ox}e^{im\varphi}=\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_{0x}^{(n)}\cos\frac{n\pi z}{h_0}e^{im\varphi};$$

$$\tau_{\varphi x}=\tau_{o\varphi x}e^{im\varphi}=\sum_{n=0}^{\infty}\tau_{0\varphi x}^{(n)}\cos\frac{n\pi z}{h_0}e^{im\varphi};$$

$$\tau_{zx}=\tau_{ozx}e^{im\varphi}=\sum_{n=1}^{\infty}\tau_{0zx}^{(n)}\sin\frac{n\pi z}{h_0}e^{im\varphi}.$$

Кроме того, при выводе системы (5) для исключения из уравнений тригонометрических функций $\cos(n\pi z/h_o)$ $\sin(n\pi z/h_o)$ экспоненты, входящие в функции $F_{ok}^{(1)}$ и $F_{1k}^{(1)}$, раскладывались в ряды Фурье(6) , а для нормальных напряжений на торцевых поверхностях диска модифицированные функции Бесселя I_m и K_m в ряды по ортогональным функциям $\chi_{mp}^{(1)}$ (7):

$$e^{\omega_k (z-h_0)} = \sum_{p=0}^{\infty} t_{5p} \cos\frac{p\pi z}{h_0}; \quad e^{-\omega_k z} = \sum_{p=0}^{\infty} t_{6p} \cos\frac{p\pi z}{h_0};$$

$$e^{\omega_k (z-h_0)} = \sum_{p=1}^{\infty} t_{7p} \sin\frac{p\pi z}{h_0}; \quad e^{-\omega_k z} = \sum_{p=0}^{\infty} t_{8p} \sin\frac{p\pi z}{h_0}; \qquad (6)$$

$$e^{\Omega_k z} = \sum_{p=0}^{\infty} t_{9p} \cos\frac{p\pi z}{h_0}; \quad e^{-\Omega_k z} = \sum_{p=0}^{\infty} t_{10p} \cos\frac{p\pi z}{h_0};$$

$$e^{\Omega_k z} = \sum_{p=1}^{\infty} t_{11p} \sin\frac{p\pi z}{h_0}; \quad e^{-\Omega_k z} = \sum_{p=1}^{\infty} t_{12p} \sin\frac{p\pi z}{h_0}.$$

Здесь

$$t_{5p} = \frac{2\omega_k e^{-\omega_k h_0}}{h_0} \frac{(-1)^p e^{\omega_k h_0} - 1}{\omega_k^2 + \left(\frac{p\pi}{h_0}\right)^2}; \quad t_{50} = \frac{e^{-\omega_k h_0}}{h_0} \frac{e^{\omega_k h_0} - 1}{\omega_k};$$

$$t_{6p} = -\frac{2\omega_k}{h_0} \frac{(-1)^p e^{-\omega_k h_0} - 1}{\omega_k^2 + \left(\frac{p\pi}{h_0}\right)^2}; \quad t_{60} = -\frac{1}{h_0} \frac{e^{-\omega_k h_0} - 1}{\omega_k};$$

$$t_{7p} = \frac{2\pi p e^{-\omega_k h_0}}{h_0^2} \frac{1-(-1)^p e^{\omega_k h_0}}{\omega_k^2 + \left(\frac{p\pi}{h_0}\right)^2}; \quad t_{8p} = \frac{2\pi p}{h_0^2} \frac{1-(-1)^p e^{-\omega_k h_0}}{\omega_k^2 + \left(\frac{p\pi}{h_0}\right)^2};$$

$$t_{9p} = \frac{2\Omega_k}{h_0} \frac{(-1)^p e^{\Omega_k h_0} - 1}{\Omega_k^2 + \left(\frac{p\pi}{h_0}\right)^2}; \quad t_{90} = \frac{1}{h_0} \frac{e^{\Omega_k h_0} - 1}{\Omega_k};$$

$$t_{10p} = -\frac{2\Omega_k}{h_0} \frac{(-1)^p e^{-\Omega_k h_0} - 1}{\Omega_k^2 + \left(\frac{p\pi}{h_0}\right)^2}; \quad t_{10\,0} = -\frac{1}{h_0} \frac{e^{-\Omega_k h_0} - 1}{\Omega_k};$$

$$t_{11p} = \frac{2\pi p}{h_0^2} \frac{1-(-1)^p e^{\Omega_k h_0}}{\Omega_k^2 + \left(\frac{p\pi}{h_0}\right)^2}; \quad t_{12p} = \frac{2\pi p}{h_0^2} \frac{1-(-1)^p e^{-\Omega_k h_0}}{\Omega_k^2 + \left(\frac{p\pi}{h_0}\right)^2};$$

$$I_m(x\gamma_n) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{\gamma np} \chi_{mp}^{(1)}(x); \quad I_m(x\delta_n) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{\delta np} \chi_{mp}^{(1)}(x);$$

$$K_m(x\gamma_n) = \sum_{p=0}^{\infty} b_{\gamma np} \chi_{mp}^{(1)}(x); \quad K_m(x\delta_n) = \sum_{p=0}^{\infty} b_{\delta np} \chi_{mp}^{(1)}(x), \tag{7}$$

где

$$\chi_{mp}^{(1)}(x) = P_p^{(1)} \left[Y'_m(r_1 P_p^{(1)}) J_m(x P_p^{(1)}) - J'_m(r_1 P_p^{(1)}) Y_m(x P_p^{(1)}) \right];$$

$$a_{\gamma np} = \frac{\pi\gamma_n}{G_{np}\beta_p}\left[I'_m(r_2\gamma_n)\alpha_p - I'_m(r_1\gamma_n)\right];$$

$$b_{\gamma np} = \frac{\pi\gamma_n}{G_{np}\beta_p}\left[K'_m(r_2\gamma_n)\alpha_p - K'_m(r_1\gamma_n)\right];$$

$$a_{\delta np} = \frac{\pi\delta_n}{H_{np}\beta_p}\left[I'_m(r_2\delta_n)\alpha_p - I'_m(r_1\delta_n)\right];$$

$$b_{\delta np} = \frac{\pi\delta_n}{H_{np}\beta_p}\left[K'_m(r_2\delta_n)\alpha_p - K'_m(r_1\delta_n)\right];$$

$$\alpha_p = \frac{J'_m(r_1 P_p^{(1)})}{J'_m(r_2 P_p^{(1)})}; \qquad \beta_p = \left(1 - \frac{m^2}{r_2^2 (P_p^{(1)})^2}\right)\alpha_p^2 - \left(1 - \frac{m^2}{r_1^2 (P_p^{(1)})^2}\right);$$

$$G_{np} = (P_p^{(1)})^2 + \left(\frac{p\pi}{h_0}\right)^2 - \frac{\lambda^2}{c_1^2}; \quad H_{np} = (P_p^{(1)})^2 + \left(\frac{p\pi}{h_0}\right)^2 - \frac{\lambda^2}{c_2^2}.$$

Последовательности уравнений (5) позволяют решить задачу о колебаниях диска, если граничные условия заданы в виде напряжений. Для расчета вибрации диска в случае, когда на его боковые поверхности наложены кинематические ограничения, а также для построения дискового волнового конечного элемента данные последовательности необходимо дополнить уравнениями, позволяющими рассчитывать амплитуды перемещений. Этот вопрос рассмотрен следующей статье настоящего сборника.

Список литературы

1. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. Киев: Наукова думка .-1978 . 340с.
2. Фридман Л.И. О представлении решений динамических задач теории упругости в цилиндрических координатах // Механика твердого тела - 1986 , № 6 .- с.71-80.