

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ РАЗМЕРНЫХ ЦЕПЕЙ С УЧЕТОМ СТРУКТУРЫ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Трухман И.М., Рамзаева Е.А., Мартынов В.А.

Самарской государственной аэрокосмической университет, г. Самара

Предлагаемый метод является частным случаем применения итерационного метода решения системы нелинейных уравнений к условиям задачи расчета технологических размерных цепей при механической обработке заготовок, когда каждое последующее расчетное уравнение системы отличается от предыдущих более одним неизвестным. Применительно к рассматриваемой задаче такая ситуация в практике размерных расчетов называется "неопределенность", т.е. в расчетном уравнении появляется два и более неизвестных (настроечных звена [1]).

Технологические требования, предъявляемые к расчету линейных размерных цепей (дискретный набор предпочтительных окончаний номинальных значений рассчитываемых размеров, табличная функциональная зависимость величин допусков технологических размеров от их номинальных значений, т.е. функциональная зависимость "свободных членов" системы уравнений от расчетных значений), не допускают при решении системы линейных уравнений применения традиционных математических методов решения (Гаусса, Карно и т.п.).

В предлагаемом итерационном методе решение системы уравнений сводится к последовательному вычислению её корней, при этом каждое уравнение системы рассматривается как уравнение с одним неизвестным. Общую схему метода рассмотрим на конкретном примере.

Пусть дана система уравнений (неравенств), состоящая из трех линейных размерных цепей, замыкающими звеньями которых являются припуски:

$$\left. \begin{aligned} A_1 - A_2 + A_3 &\leq z_1 \\ -A_1 + A_2 - A_3 &\leq z_2 \\ -A_1 - A_2 + A_3 &\leq z_3 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Задаваясь начальными приближенными значениями A_1^i и A_2^i

(для их определения можно разрешить данную систему как арифметическую систему линейных уравнений), решаем первое уравнение системы $A_1 - A_2 + A_3 = z_1$ (2)

относительно A_3 . Подставляем приближенные значения A_1^i, A_2^i и рассчитанное значение A_3 во второе неравенство системы:

$$-A_1 + A_2 - A_3 \leq z_2. \quad (3)$$

Если неравенство не выполняется, то изменяем приближенное значение A_2^i (способ корректировки приближенных значений рассматривается далее) и вновь решаем уравнение (2). Итерации повторяются до тех пор (n шагов), пока условие неравенства (3) не будет выполнено. Далее полученные значения переменных A_1^i, A_2^i, A_3^i подставляем в третье уравнение системы (1) и проверяем следующее неравенство:

$$-A_1 - A_2 + A_3 \leq z_3. \quad (4)$$

Если условие (4) не выполняется, то изменяем значение A_1^i и вновь решаем уравнение (2), затем проверяем неравенства (3) и (4) и т.д. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет выполнено условие (4). Полученные на некоторой m -ой итерации значения A_1^m, A_2^m, A_3^m будут являться решением системы (1).

Из приведенного примера видно, что трудоемкость решения системы существенно зависит от её структуры, т.е. от количества ненулевых коэффициентов в уравнениях системы.

Структура системы уравнений размерных цепей достаточно разрежена и трудоемкость ее решение предлагаемым методом может быть существенно уменьшена, если рационально организовать порядок вычисления корней в системе.

Покажем каким образом можно уменьшить трудоемкость вычислительного процесса на примере другой системы уравнений (5)

$$\left. \begin{aligned} A_1 - A_2 &\leq z_1 \\ A_2 - A_3 &\leq z_2 \\ A_1 + A_3 &\leq z_3 \\ A_2 + A_3 - A_4 &\leq z_4 \\ A_2 + A_3 - A_5 &\leq z_5 \\ A_3 + A_5 - A_6 &\leq z_6 \end{aligned} \right\} (5)$$

Разрешив сначала при фиксированном A_1 систему из первых трех уравнений относительно переменных A_2, A_3, A_4 , этот результат используем при решении четвертого и пятого уравнений относительно A_4 и A_5 и

затем решаем последнее уравнение системы относительно A_6 . Итерационный подход при решении системы (5) используется лишь при расчете переменных A_1, A_2, A_3 , т.о. общая трудоемкость решения задачи сокращается путем учета структуры системы.

В большинстве случаев, при формировании размерной структуры ТП механической обработки заготовок стараются придерживаться правил (принципов) постоянства, единства и совмещения баз. При этом, расчетная система уравнений может быть преобразована в последовательность уравнений, каждое из которых содержит только одно неизвестное, т.о. обычный последовательный расчет параметров составляющих звеньев размерных цепей является частным случаем расчета по итерационному методу (т.е. ограничиваются одной итерацией расчета).

Упорядочение системы уравнений по размерным цепям для рациональной организации вычислительного процесса.

Обозначим через $C = [c_{ij}]_1^n$ матрицу коэффициентов системы

уравнений по размерным цепям. Система содержит n уравнений с n неизвестными (составляющими звеньями). Для формализации алгоритма упорядочения системы используются три специальных дискретных функции:

1) $a_i = \sum_{j=1}^n |c_{ij}|$ - количество единиц в i -ой строке матрицы C ;

2) l_j - логическая функция, характеризующая j -ый элемент i -ой строки относительно k ($k = \overline{1, i-1}$) элементов j -ого столбца матрицы C .

3) $l_j = \begin{cases} 1, & \text{если } c_{ij} \cdot \sum_{k=1}^{i-1} |c_{kj}| \neq 0 ; \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$;

4) p_k функция, характеризующая i -ую строку, относительно k ($k = \overline{1, i-1}$) предшествующих ей строк матрицы C :

$$p_k = a_i \cdot \sum_{j=1}^n l_j .$$

Формализованный алгоритм упорядочения системы уравнений по размерным цепям содержит следующие пункты:

1. Для всех строк матрицы C ($i = \overline{1, n}$) вычисляются величины a_i .

2. Матрица C сортируется в порядке возрастания величин a_i . Первая строка упорядоченной матрицы C^* выбирается из строк, для которых величина $a_i = \min_{i=1, n} a_i$. Если величина $a_{\min}=1$, то все строки $i=1, n$

матрицы C для которых $a_i=1$ становятся строками упорядоченной матрицы C . Число упорядоченных строк обозначим через j . Если величина $a_{\min}>1$ и матрица C содержит несколько строк с минимальной величиной a_i , то первой строкой перестроенной матрицы C^* выбирается строка соответствующая размерной цепи, замыкающим звеном которой является чертежный размер. Число упорядоченных строк $j=1$. Если группа строк с минимальной величиной a_i не содержит уравнения размерной цепи, замыкающим звеном которой является чертежный размер, то первой упорядоченной строкой выбирается первая строка перестроенной матрицы C . В этом случае $j=1$.

3. $m=j+1$ - первый элемент неупорядоченной матрицы C .

4. Для всех строк $k=\overline{m, n}$ вычисляется значение p_k относительно первых j строк отсортированной матрицы C .

5. Выполняется сортировка неупорядоченной части матрицы C по возрастанию величины p_k

6. Выделяется группа строк с минимальным p_k

7. Если в группе с минимальным p_k одна строка, то переходим пункту 11, в противном случае выполняется пункт 8.

8. Если минимальное $p_k=1$, то переходим к пункту 10, в противном случае выполняется пункт 9.

9. Из группы строк с минимальным p_k выделяется строка, соответствующая размерной цепи, замыкающим звеном которой является чертежный размер. Выделенная строка записывается на $j+1$ место в упорядоченной матрице C^* . Если найдена строка с нужными параметрами, то переходим к пункту 12, если среди строк с минимальным p_k нет размерной цепи, замыкающее звено которой - конструкторский размер, то выполняется пункт 10.

10. Группа строк с минимальным p_k сортируется по убыванию величин a_i .

11. Первая строка отсортированной группы записывается на $j+1$ место в упорядоченной матрице C^* .

12. $j = j + 1$ - количество упорядоченных строк в матрице C^* .

13. Если $j < n$, то алгоритм повторяется от пункта 3, в противном случае процесс упорядочения системы уравнений окончен. Полученная матрица C^* будет соответствовать упорядоченной системе уравнений.

Приведем пример упорядочения матрицы некоторой системы уравнений. Значения линейных коэффициентов уравнений

рассматриваем без учета знака. Для переупорядочения системы имеет значение лишь то, что коэффициент не равен 0.

Пусть исходная матрица C имеет следующий вид:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

П.1 алгоритма: подсчитано количество ненулевых коэффициентов a_i по каждому уравнению: 4-я строка имеет $\min a_i$ (матрица 1)

	a_i	p_1	a_i		
1.	$\begin{array}{r l} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}$	2.	$\begin{array}{r l} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}$	3.	$\begin{array}{r l} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$

Далее строки матрицы C переставляются по порядку возрастания a_i ; 4-я строка матрицы C становится первой строкой упорядоченной матрицы C^* ; индекс $j=1$; $m=2$ - номер первой неупорядоченной строки; для оставшихся 5-и неупорядоченных строк ($2 \div 6$) вычисляются величины p_1 относительно первой ($j=1$) упорядоченной строки (п.п.2÷4 алгоритма упорядочения).

Новое состояние матрицы C (матрица 2, - горизонтальной линией отделена упорядоченная строка); $\min p_1$ имеют 3 строки: $2 \div 5$.

Матрица сортируется по возрастанию p_1 ; группа с минимальным p_1 содержит более одной строки и $\min p_1$ превышает 1 (равно 2, т.е. даже после определения значений двух неизвестных не удастся выявить следующее уравнение только с одним неизвестным). Новое состояние матрицы после выполнения п.п. алгоритма $4 \div 10$ (матрица 3). Значения a_i указаны только для выделенной группы с минимальным p_1 : строки с минимальным p_1 упорядочиваются по возрастанию a_i . Значения a_i одинаковы - в качестве следующей упорядоченной строки в матрицу C^* вносится первая строка выделенной группы).

П.3 алгоритма: упорядочены две строки матрицы ($j=2$; матрица 4); $m=3$ - номер первой неупорядоченной строки; для оставшихся 4-х неупорядоченных строк ($3 \div 6$) вычисляются величины p_2 относительно двух (1 и 2) упорядоченных строк (п.п.3,4 алгоритма).

$$4. \begin{array}{cccccc|c} & & & p_2 & & & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$5. \begin{array}{cccccc|c} & & & a_1 & & & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \end{array}$$

$$6. \begin{array}{cccccc|c} & & & p_3 & & & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Алгоритм выполнен до п.13 и возвращается к выполнению п.3; $\min p_2=1$ имеют 3 строки: 3, 4 и 6; т.е. после вычисления неизвестных в двух первых уравнениях эти уравнения имеют только одно неизвестное. Формализованный алгоритм требует выполнения п.п.5-10: (матрица 5)-строки с минимальным p_2 упорядочиваются по a_i .

В п.12 алгоритма упорядочено 3 строки (матрица 6); осталось упорядочить - 3 строки; алгоритм выполняет следующий цикл, начиная с п.3. Для неупорядоченных строк вычисляются значения p_3 , ни одно из которых не превышает 1. Строки, для которых $p_3=0$ соответствуют уравнениям, которые являются "проверочными" для неизвестных, значения которых уточняются в процессе итерационных вычислений.

Предпочтительнее для охватывающей (с большим числом неизвестных) подсистемы уравнений иметь "проверочным" уравнение, которому соответствует размерная цепь относительно припуска (см. ниже). Поэтому в алгоритме упорядочения уравнений присутствует пункт 9, по которому осуществляется выбор среди строк при $p_i=0$.

Фактически матрица уже упорядочена. Матрица 7 отображает формальное продолжение алгоритма упорядочения до момента $j = n$, - условия завершения алгоритма.

В нескольких пунктах алгоритма особо выделялись уравнения, соответствующие размерным цепям, построенным относительно

$$7. \begin{array}{cccccc|c} & & & p_4 & & & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

перестроенная матрица

$$C^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

конструкторских размеров. Местоположение (порядок расчета) таких уравнений в системе имеет особое значение, когда не удается реализовать традиционный последовательный расчет n уравнений, каждое из которых имеет только одно неизвестное. В этом случае

обязательно выполнение нескольких итераций расчета, при том определенные уравнения становятся “проверочными” для первоначально принятых значений “полагаемых” неизвестных (составляющих звеньев размерных цепей)

В примере с системой (1) такими “проверочными” были: уравнение (2) для неизвестного A_2 и уравнение (3) для неизвестного A_1 . В примере с системой (5) “проверочным” является третье по порядку уравнение. Результат проверки соотношения частей этого уравнения для заданного значения A_1 и рассчитанного значения A_3 определяет необходимость повторных итераций для расчета неизвестных, входящих в подсистему из первых трех уравнений.

“Проверочное” уравнение является замыкающим для некоторой подсистемы уравнений, в которой значение одного неизвестного первоначально выбиралось из множества его возможных значений. Уравнение, соответствующее размерной цепи на припуск, в действительности является нестрогим неравенством, причем односторонним неравенством. Левая часть неравенства не должна быть меньше его значения в правой части, но не имеет ограничений по превышению этого значения. Уравнение, соответствующее размерной цепи на конструкторский размер, также является неравенством, но двухсторонним неравенством. Максимальное и минимальное допустимые значения в левой части неравенства могут быть различными лишь на величину разницы допуска чертежного размера и суммы допусков составляющих звеньев размерной цепи. Иногда это может быть точное равенство и тогда имеем дело с истинным уравнением. Точность решения уравнения определяется требуемой точностью вычисления неизвестных (номинальных значений технологических размеров), т.е. некоторой малой величиной ξ . Чаще всего точность расчета задается до 1/2 некоторого десятичного знака после запятой (например: до 0,0005), т.е. инерционный процесс расчета будет повторяться до тех пор, пока предыдущее и последующее значение некоторого “полагаемого” неизвестного A_i : A_i^m и A_i^{m+1} будут отпичаться не более, чем на величину ξ :

$$\left| A_i^m - A_i^{m+1} \right| < \xi. \quad (6)$$

Округление расчетного значения такого неизвестного до предпочтительных технологических окончаний не производится. Этот

случай является наиболее сложным при расчете по итерационному методу. Естественно условия завершения итерационного процесса будут менее жесткими, если “проверочным” в некоторой подсистеме уравнений является уравнение размерной цепи на припуск. В этом случае итерационный процесс расчета подсистемы выполняется до тех пор, пока

$$\left(A_i^m - A_i^{m+1} \right) \cdot c_{ij} \geq 0. \quad (7)$$

В этом случае область возможных значений “полагаемого” неизвестного можно определить с учетом ряда предпочтительных технологических окончаний. Поэтому исходную систему уравнений желательно упорядочить таким образом, чтобы “проверочными” уравнениями ее подсистем были бы уравнения, составленные по размерным цепям на припуск.

Описанный метод расчета может быть использован при расчете не только технологических размерных цепей, но и конструкторских, которые имеют более выраженную параллельную связь уравнений. При этом, ранее сформулированные правила (принципы) расчета [2] параллельно-связанных размерных цепей выполняются автоматически.

Способ определения начальных значений итерационных неизвестных системы уравнений и области их допустимых значений в значительной мере обуславливает скорость сходимости итерационного расчета. Первоначально предполагалось использовать в качестве начальных “полагаемых” значений чертежные параметры соответствующих технологических размеров, но при многократном тестировании программы итерационного расчета эти значения оказывались слишком далекими от искомых. В случаях сложной неопределенности технологической размерной структуры (большое число составляющих звеньев, многократная вложенность подсистем уравнений) за счет количества итераций возрастало время расчета.

Первоначальный расчет системы технологических размерных уравнений как обычной арифметической системы для определения начальных значений итерационных неизвестных позволяет во много раз сократить общее количество вычислительных итераций по данному методу. В качестве метода расчета арифметической системы уравнений наиболее удобным при автоматическом расчете оказался метод детерминантов, тем более, что в данном случае абсолютное значение детерминанта системы равно 1 ($|\det_C| = 1$).

Границы области допустимых значений неизвестных, вычисляемых итерационным способом (“полагаемых”) можно гарантировано предположить принимая во внимание максимальные величины технологических припусков.

Алгоритм переопределения значений итерационных неизвестных. Возможны два варианта:

- пошаговый поиск очередного приближения; величина шага изменяется в зависимости от близости текущей точки к искомому значению, когда несоответствие правой и левой частей “проверочного” уравнения уменьшается;

- поиск очередного приближения по аналогии с численным методом решения нелинейного уравнения: метод линейной аппроксимации функции; очередное приближение вычисляется по формуле:

$$x_i = \frac{x_i \cdot f(x_{i-1}) - x_{i-1} \cdot f(x_i)}{f(x_i) - f(x_{i-1})}.$$

Путем экспериментальной проверки был разработан алгоритм вычисления очередного приближения итерационных переменных на основе композиции этих методов. Метод линейной аппроксимации при поиске следующего значения “полагаемого” переменного применяется на отрезке возможных значений $[x_{i-1}, x_i]$, границы которого определены методом пошагового поиска, а значения функции ошибки “проверочного” уравнения имеют на границах этого отрезка противоположные знаки (метод Ньютона). Композиционный метод оказался наиболее приемлемым по времени и качеству расчета (меньший процент пропуска корней и расхождения итерационного процесса).

Список литературы

1. Иващенко И.М. Технологические размерные расчеты и способы их автоматизации. М.:Машиностроение, 1975.-222с.
2. Трухман И.М. и др. Размерный анализ технологических процессов: Метод.указания / Самарский Авиационный ин-т. Самара, 1991.-35с.