ФОРМИРОВАНИЕ РАЗБРОСА РЕЗОНАНСНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В РАБОЧИХ КОЛЕСАХ ГТД СО СЛАБОЙ СВЯЗАННОСТЬЮ КОЛЕБАНИЙ ЛОПАТОК

Ермаков А.И. , Егоров М.Н.
Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара

В связи с тем, что рабочие колеса со слабой связанностью колебаний утрачивают основные признаки, характерные для систем с нарушенной поворотной симметрией, к чему прежде всего следует отнести отсутствие парных форм с расслоившимися кратными частотами, возникает вопрос: каким же в этом случае является механизм формирования разброса резонансных напряжений? Для ответа на него проведем исследование вынужденных колебаний рабочего колеса с неидентичными лопатками. Задачу будем решать методом волновых динамических жесткостей [1]. Индивидуальные отличия динамических свойств любой из лопаток учтем с помощью размещения на периферии номинального (соответствующего номинальным чертежным размерам) колеса обобщенных точечных масс ΔM_k и действием на него дополнительных обобщенных внутренних сил неупругого сопротивления $\Delta \widetilde{R}_{mk}$, определяемых по формуле [2]:

$$\Delta \widetilde{R}_{mk} = i \frac{\Delta \delta_k}{\pi} k_{mэ} \widetilde{q}_{mk} . \qquad (1)$$

Здесь $\widetilde{q}_{mk}$ – обобщенное смещение k-ой лопатки; $k_{mэ}$– обобщенная статическая жесткость системы; $\Delta\delta_k$ – коэффициент, величина которого учитывает отличие демпфирующих свойств k-ой лопатки от номинальной.

Возбуждение колеса осуществим цепью m назад бегущих волн распределенной нагрузки с осевой и окружной составляющими. Запишем условие равновесия на периферии k -ой лопатки

$$\widetilde{Q}_k + \Delta M_k \frac{\partial^2 \widetilde{q}_k}{\partial t^2} + \Delta R_{0k} \widetilde{q}_k = 0 . \qquad (2)$$

где $\widetilde{Q}_k$, $\widetilde{q}_k$ – соответственно обобщенные реакция и перемещение на периферии k-ой лопатки в произвольный момент времени.

В линейной постановке рабочее колесо от действия окружной неоднородности газового потока будет совершать гармонические колебания и поэтому для k-ой лопатки справедливо:

$$\tilde{Q}_k = Q_k e^{im\omega t}; \qquad \tilde{q}_k = q_k e^{im\omega t}, \qquad (3)$$

где ω - частота вращения ротора.

В выражениях (3) Q_k и q_k являются комплексными амплитудами соответственно реакции и смещения при колебаниях k-ой лопатки.

Разложим амплитуды Q_k и q_k, распределенные по S лопаткам неизвестным нам способом, в дискретные ряды Фурье. Аналогично поступим с величинами ΔM_k и ΔR_{0k}. Тогда для лопатки с порядковым номером k (k=0,1,2, ..., S–1) можно записать:

$$Q_k = \sum_{n=-d}^{d+d_0} Q_n e^{i\frac{2\pi}{S}nk}; \qquad q_k = \sum_{n=-d}^{d+d_0} q_n e^{i\frac{2\pi}{S}nk}; \qquad (4)$$

$$\Delta M_k = \sum_{g=-d}^{d+d_0} \mu_g e^{i\frac{2\pi}{S}gk}; \qquad \Delta R_{0k} = \sum_{g=-d}^{d+d_0} \upsilon_g e^{i\frac{2\pi}{S}gk}.$$

Здесь Q_n и q_n – искомые амплитуды гармоник разложения;

$$\mu_g = \frac{1}{S}\sum_{k=0}^{S-1} \Delta M_k e^{-i\frac{2\pi}{S}gk}; \qquad \upsilon_g = \frac{1}{S}\sum_{k=0}^{S-1} \Delta R_{0k} e^{-i\frac{2\pi}{S}gk}.$$

С учетом (3) и разложений (4) уравнение (3) принимает вид

$$\sum_{g=-d}^{d+d_0} Q_n e^{i\frac{2\pi}{S}nk} - m^2\omega^2 \sum_{g=-d}^{d+d_0}\sum_{n=-d}^{d+d_0} \mu_g q_n e^{i\frac{2\pi}{S}nk} e^{i\frac{2\pi}{S}gk} +$$

$$+ i \sum_{g=-d}^{d+d_0}\sum_{n=-d}^{d+d_0} \upsilon_g q_n e^{i\frac{2\pi}{S}nk} e^{i\frac{2\pi}{S}gk} = 0. \qquad (5)$$

Рассмотрим двойную сумму

$$\sum_{n=-d}^{d+d_0}\sum_{g=-d}^{d+d_0} \mu_g q_n e^{i\frac{2\pi}{S}(g+n)k}. \qquad (6)$$

Входящая в нее экспонента является периодической дискретной функцией, которая может принимать только S отличных друг от друга значений. Их можно получить, если изменять ее аргумент от 0 до i 2π с шагом α, равным

$$\alpha = i\,\frac{2\pi}{S}\;.$$

В связи с этим выражение (6) можно представить в виде суммы S групп, в каждую из которых будут входить члены, содержащие в качестве одного из сомножителей экспоненту

$$e^{i\frac{2\pi}{S}jk},$$

где переменная j, аналогично переменным n и g, может принимать любое значение из интервала –d ... d+d0. Поскольку всего в двойной сумме содержится S2 членов, то в каждую группу попадает S слагаемых. Условием вхождения слагаемых в группу является

$$g + n = j \pm \xi S\,, \qquad (7)$$

где $\xi=0$, если $|g+n| \le s/2$, и $\xi=1$, если $|g+n| > s/2$.

Из (7) видно, что одну из переменных g или n допустимо считать независимой. Пусть переменная n в группе последовательно изменяется от –d до d+d0, тогда для остальных слагаемых группы справедливо

$$g = j - n \pm \xi S$$

и каждую группу можно представить как сумму

$$\sum_{n\ -d}^{d+d_0} \mu_{j-n\pm\xi S}\, q_n\, e^{i\frac{2\pi}{S}jk}\;.$$

Учитывая, что таких сумм S и что μ j–n±ξS =μ j–n, представим выражение (6) в виде

$$\sum_{j=-d}^{d+d_0}\ \sum_{n=-d}^{d+d_0} \mu_{j-n}\, q_n\, e^{i\frac{2\pi}{S}jk}\;. \qquad (8)$$

Аналогично запишем вторую двойную сумму уравнения (5)

$$\sum_{g=-d}^{d+d_0}\ \sum_{n--d}^{d+d_0} \upsilon_g\, q_n\, e^{i\frac{2\pi}{S}(n+g)k} = \sum_{j=-d}^{d+d_0}\ \sum_{n=-d}^{d+d_0} \upsilon_{j-n}\, q_n\, e^{i\frac{2\pi}{S}jk}\;. \qquad (9)$$

Заменяя двойные суммы в (5) выражениями (8) и (9), получаем

$$\sum_{j=-d}^{d+d_0}\left(Q_j - m^2\omega^2\sum_{n=-d}^{d+d_0}\mu_{j-n}q_n + i\sum_{n=-d}^{d+d_0}\upsilon_{j-n}q_n\right)e^{i\frac{2\pi}{S}jk} = 0.$$

В (10) Q_j фактически является амплитудой цепи j волн обобщенной реакции на внешней границе рабочего колеса. В соответствии с методом волновых динамических жесткостей для цепи j волн справедливо:

$$\begin{aligned}
Q_j &= \left(h_j + i\frac{\delta_j}{\pi}k_{jэ}\right)q_j, && \text{при}\quad j \neq m;\\
Q_m &= \left(h_m + i\frac{\delta_m}{\pi}k_{mэ}\right)q_{jm} - Q_{mB}, && \text{при}\quad j = m.
\end{aligned}\qquad (11)$$

Здесь h_n- обобщенная волновая динамическая жесткость рабочего колеса. Уравнение (10) должно удовлетворяться для любой лопатки (любого значения k). Это возможно только в случае, если выражения в скобках перед каждой экспонентой равны нулю. Таким образом (10) приводит к появлению следующей системы S уравнений

$$\left(h_m + i\frac{\delta_m}{\pi}k_{mэ}\right)q_m - m^2\omega^2\sum_{n=-d}^{d+d_0}\mu_{m-n}q_n + i\sum_{n=-d}^{d+d_0}\upsilon_{m-n}q_n = Q_{mB},\ j = m;$$

$$\left(h_j + i\frac{\delta_j}{\pi}k_{jэ}\right)q_j - m^2\omega^2\sum_{n=-d}^{d+d_0}\mu_{j-n}q_n + i\sum_{n=-d}^{d+d_0}\upsilon_{j-n}q_n = 0,\quad j \neq m.$$

Ее решение позволяет определить резонансные частоты вращения рабочего колеса при его возбуждении m-ой гармоникой. Проанализируем с помощью полученных уравнений влияние связанности колебаний на разброс резонансных амплитуд колебаний в модельном рабочем колесе, конструкция которого изображена на рис.1. Будем возбуждать его гармоникой с назад бегущей волной, постепенно уменьшая связанность колебаний лопаток за счет увеличения толщины диска h.

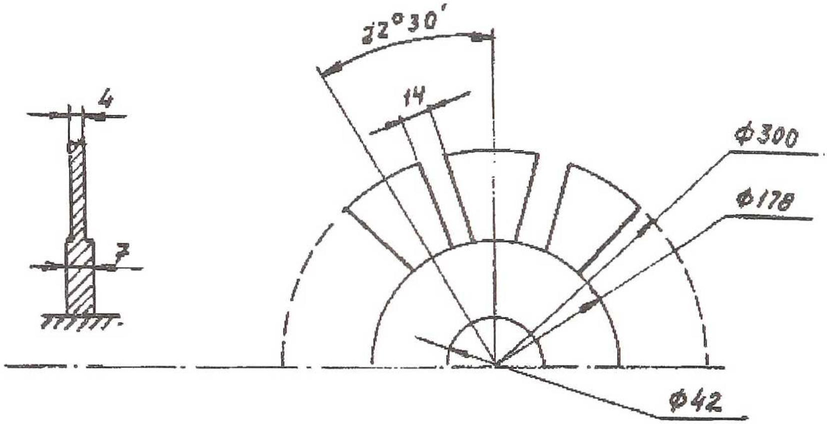

Рис. 1. Исходный вариант конструкции модели

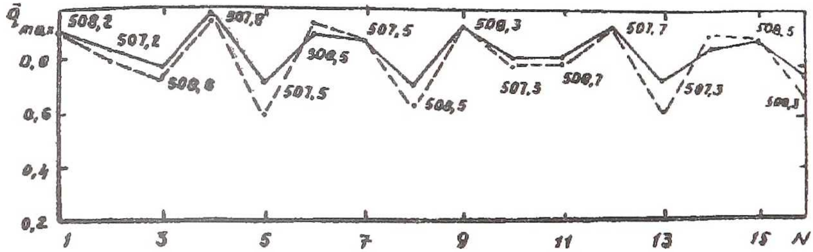

Рис. 2. Разброс резонансных амплитуд колебаний при возбуждении исходной модели 3-ей гармоникой

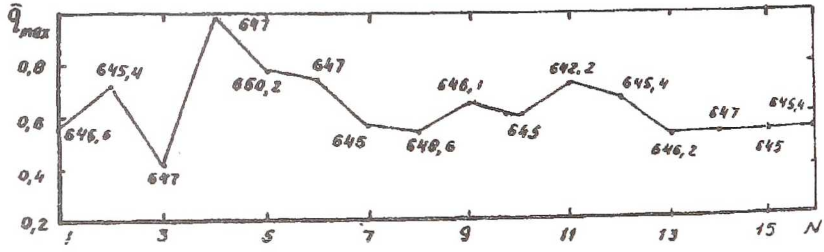

Рис. 3. Разброс резонансных амплитуд колебаний при возбуждении модели с толщиной диска h=14 мм 3-ей гармоникой.

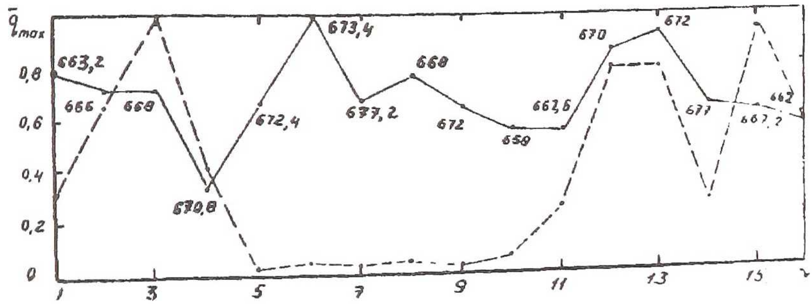

Рис. 4. Разброс резонансных амплитуд колебаний при возбуждении модели с толщиной диска h=14 мм 6-ой гармоникой

Результаты исследований, позволяющие прокомментировать выявленные закономерности, представлены на рис.2 ... рис.4. На рис.2 показано распределение максимальных амплитуд при возбуждении исходной конструкции 3-ей гармоникой. Цифры на рисунке соответствуют тем частотам, на которых у каждой из лопаток была достигнута максимальная амплитуда колебаний. Так как собственная частота одной из парных форм с m=3 равна $f_3^{(1)} = 507{,}3$ Гц, а другой – $f_3^{(2)} = 508{,}7$ Гц, то очевидно, что в данном случае весь резонансный диапазон, составляющий 1,4 Гц, полностью определяется суперпозицией парных форм. Пунктиром на рисунке приведено распределение максимальных резонансных амплитуд, полученное с помощью соотношения:

$$\tilde q_{zk} = q_0 \left[\left(1-\frac{p^2}{\left(p_m^{(1)}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{\pi}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \sum_{-d}^{d+v} q_{zm}^{(1)} \cos\left(\frac{2\pi}{S} mk + \beta_m^{(1)}\right) \times$$

$$\times \cos\left(pt - \gamma^{(1)}\right) + q_0 \left[\left(1-\frac{p^2}{\left(p_m^{(2)}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{\pi}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \sum_{-d}^{d+v} q_{zm}^{(2)} \cos\left(\frac{2\pi}{S} mk + \beta_m^{(2)}\right) \cos\left(pt - \gamma^{(2)}\right), \qquad (12)$$

где $\gamma^{(1)} = \operatorname{arctg} \frac{\delta}{\pi} \frac{1}{1 - \frac{p^2}{\left(p_m^{(1)}\right)^2}}$; $\gamma^{(2)} = \operatorname{arctg} \frac{\delta}{\pi} \frac{1}{1 - \frac{p^2}{\left(p_m^{(2)}\right)^2}}$;

q_0 – величина, характеризующая уровень возбуждения парных форм. Она принималась такой, что $\tilde{q}_{zk\,max} = 1$; $\tilde{q}_{zk}$ – линейное смещение k-ой лопатки в направлении оси z; $q_{zm}^{(1,2)}$ – амплитуда составляющей гармоники при разложении соответствующей собственной формы в ряд Фурье; $\beta_m^{(1,2)}$ – окружной сдвиг составляющей гармоники; δ – логарифмический декремент колебаний; p – частота вынужденных колебаний; $p_m^{(1,2)}$ – собственная частота колебаний соответствующей парной формы.

Выражение (12) не учитывает возбуждение m-ой гармоникой форм с числом узловых диаметров, отличным от m. Из рис.2 видно хорошее совпадение распределений резонансных амплитуд, определенных двумя различными способами.

При возбуждении 3-ей гармоникой модельного колеса с толщиной диска h=14 мм максимум амплитуд колебаний лопаток достигается в более широком диапазоне, чем у исходной конструкции. Распределение максимальных амплитуд по окружности модели приведено на рис.3. Отметим, что этот диапазон шире, чем резонансная зона парных форм колебаний, частоты которых соответственно равны $f_3^{(1)} = 645$ Гц и $f_3^{(2)} = 648$ Гц. Из приведенных на рис.3 данных следует, что выход за пределы резонансной зоны произошел только из-за одной лопатки №5, на которой максимальная амплитуда была достигнута на частоте 650,2 Гц. Объяснить полученный результат можно после рассмотрения одной из форм с m=4, имеющей наименьшую собственную частоту. Эта форма представлена на рис.5 и рис.6. Она достаточно сильно искажена и не является ортогональной к 3-ей гармонике. В частности, из ее разложения в ряд Фурье (рис.6) видно, что амплитуда составляющей гармоники с m=3 в ней значительна. Кроме того, форма с m=4 имеет на

5-ой лопатке почти максимальную амплитуду колебаний. Все это привело к тому, что уменьшение амплитуды колебаний 5-ой лопатки после прохождения резонансной частоты $f_3^{(2)}$ полностью компенсировалось ее ростом из-за приближения к резонансной частоте $f_4^{(1)}$. В результате уменьшение амплитуды колебаний 5-ой лопатки началось только после прохождения частоты f= 650,2 Гц. Таким образом, расширение резонансного диапазона произошло за счет возбуждения 3-ей гармоникой формы колебаний с m=4.

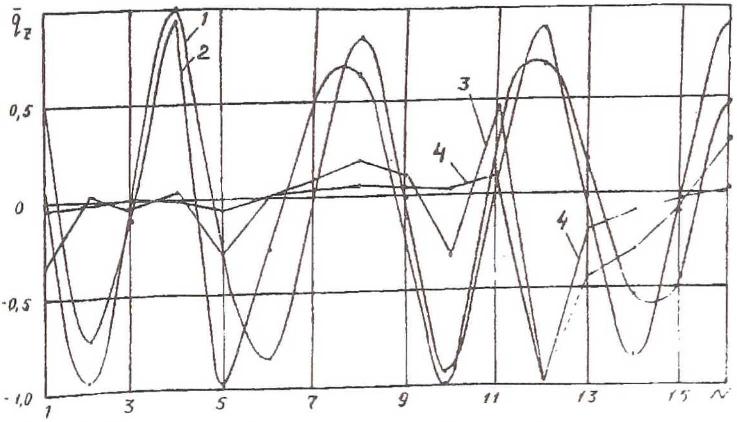

Рис. 5. Изменение формы колебаний с m=4 при утолщении диска модельного рабочего колеса:

1 – χ4=0,84; 2 – χ4=0,59; 3 – χ4=0,13; 4 – χ4=0,01

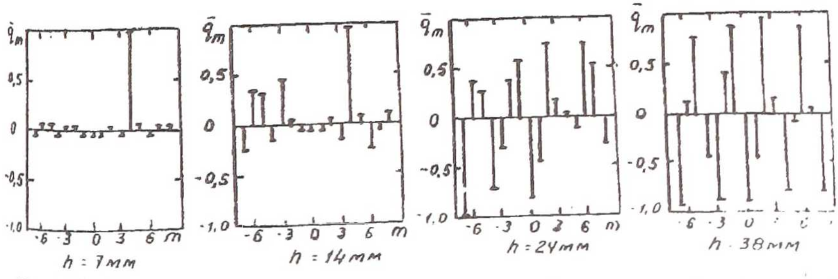

Рис. 6. Изменение гармонического состава формы колебаний с m=4 при утолщении диска модельного рабочего колеса

При возбуждении модельного колеса с толщиной диска h=14 мм шестой гармоникой диапазон частот, в котором у лопаток достигаются максимальные смещения, составляет 19 Гц. Располагаясь на частотах 658 ... 677 Гц, он связан с суперпозицией 9-ти форм (m=4 ... 8). Их собственные частоты приведены в табл.1.

Распределение максимальных амплитуд показано на рис. 4. На этом же рисунке пунктиром нанесено распределение максимальных смещений, полученное в резонансной зоне парных форм с помощью выражения (12). Из сравнения видно, как они сильно отличаются. Если связанность колебаний уменьшить еще больше, например, сделать толщину диска h=28 мм, то, как показали расчеты, уже начиная с возбуждения колеса 4-ой гармоникой, резонансный диапазон формируется как суперпозиция всех 16-ти низших форм с m от 0 до 8.

Таблица 1

Собственные частоты колебаний модели с толщиной диска 14 мм

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_m^{(1)}$, Гц	606,0	592,4	612,0	645,0	657,1	663,5	667,4	672,2	677,0
$f_m^{(2)}$, Гц	–	597,0	615,8	648,0	660,0	665,6	669,9	676,4	–

Таким образом, при наличии слабой связанности резонансные колебания рабочего колеса под воздействием m-ой гармоники происходят в некотором достаточно широком частотном диапазоне, где эта гармоника примерно в равной степени возбуждает целую группу форм одного семейства. В связи с сильным искажением и одновременным возбуждением 3-х и более форм фазовая картина колебаний утрачивает вид назад бегущей волны. Ширина резонансного диапазона, на котором достигаются максимальные амплитуды колебаний на всех лопатках, зависит от точности изготовления последних и может растягиваться на десяток и более герц. Соответственно меняется и механизм формирования разброса резонансных амплитуд. Разброс становится результатом суперпозиции резонансных колебаний по большой группе последовательно возбуждаемых локализованных форм вне зависимости от близости их собственных частот и, следовательно, плотности спектра рабочего колеса.

Список литературы

1. Иванов В.П. Колебания рабочих колес турбомашин. М.: Машиностроение , 1983. - 224с.
2. Сорокин Е.С. К вопросу неупругого сопротивления при колебаниях . М. : Госстройиздат.- 1954 .- 160 с.