ЭНТРОПИЯ ГАРМОНИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Бояринцев В.И., Костин В.И.
Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара

В докладе [1] обоснована возможность использования кинетического уравнения длительной прочности тела [2] для оценки его усталостной долговечности в рамках информационной гипотезы [3], рассматривающей накопление усталостных повреждений как процесс трансформации информационной энтропии нагрузки в термодинамическую энтропию тела. В этой связи для сравнения повреждающего действия различных нагрузок необходима временная характеристика неопределенности конечного отрезка знакопеременной нагрузки, *аналогичная, но не тождественная* дифференциальной энтропии плотности распределения стационарного случайного процесса, определяемой на бесконечно большом интервале времени. Такая необходимость связана с тем, что длительность реальной знакопеременной нагрузки, равная времени жизни конструкции, лежит в очень широких пределах: от 1/4 до $10^8...10^9$ циклов. Цель настоящей работы - определение энтропии гармонической нагрузки длительностью T.

Гармонический процесс с постоянными амплитудой, частотой и начальной фазой имеет одну единственную реализацию

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{1}$$

бесконечной продолжительности во времени.

Выделим из этой реализации произвольный отрезок конечной длительности T и введем в рассмотрение функцию $x_T(t)$, совпадающую с $x(t)$ на интервале времени $[0,T]$ и равную нулю за его пределами:

$$x_T = \begin{cases} x(t) & \text{при } t \in [0,\ T], \\ 0 & \text{при } t \notin [0,\ T]. \end{cases}$$

В силу периодичности процесса (1) и случайности выбора местоположения отрезка на оси времени началу интервала $T = 0$ будет соответствовать некоторое случайное значение начальной фазы φ, лежащее в пределах от 0 до 2π. В данной задаче нет оснований отдавать предпочтение какому-либо определенному распределению фазы. Поэтому в соответствии с изложенным в [4] принципом максимума энтропии, исходя лишь из заданных пределов изменения фазы $\varphi \in [0, 2\pi]$, будем считать ее плотность вероятности равномерной.

При таком подходе функция $x_T(t)$ становится случайной функцией аргумента φ. Ансамбль ее реализаций представляет собой набор бесконечно большого числа отрезков детерминированного процесса (1), имеющих одинаковую длительность T, но разную начальную фазу φ, величина которой не зависит от времени.*)

Зафиксируем на интервале $[0,T]$ конечное число n произвольных моментов времени t_i, $(i=1,2...n)$. Совокупность отсчетов функции $x_T(t)$ в эти моменты времени можно интерпретировать как n-мерный случайный вектор $\mathbf{X}_n$ с координатами $x_1,...x_i,\ ...\ x_n$. Энтропия такого вектора с учетом ограниченной области значений функции $x_T(t)$ определяется известным аналитическим выражением [6]:

$$h=-\int_{-A}^{A}...\int_{-A}^{A}W_n(x_1,...,x_i,...,x_n)\ln\left\{\Delta_x^n W_n(x_1,...,x_i,...,x_n)\right\}dx_1...dx_n\ , \quad (2)$$

где $W_n(x_1,...,x_i,...,x_n)$ - n-мерная плотность вероятности процесса, Δ_x интервал случайной величины x, задающий положение нуля на шкале энтропии. Примем его равным единице. Натуральные логарифмы в формуле (2) использованы для удобства теоретического анализа.

Для n-мерной плотности вероятности квазидетерминированного случайного процесса справедлива формула [5]

$$W_n(x_1,...,x_i,...,x_n)=W_1(x_1)\prod_{i=2}^{n}W_2(x_i|x_1)\ . \quad (3)$$

Здесь $W_1(x_1)$ - одномерная (безусловная) плотность вероятности

случайной величины $x_1=x_1(t_1)$:

$$W_1(x_1)=\frac{1}{\pi\sqrt{A^2-x_1^2}}\ ; \quad (4)$$

$W_2(x_i\,|\,x_1)$ - условная плотность вероятности, характеризующая зависимость случайной величины $x_i=x_i(t_i)$ от значения x_1.

Аналитическое выражение для $W_2(x_i\,|\,x_1)$ можно ввести, исходя из следующих соображений. При любом фиксированном значении $x=x_1$ начальная фаза φ определяется однозначно из (1):

$$\varphi=\arccos(x_1/\mathrm{A})+\omega_0 t_1.$$

Следовательно, дальнейшее поведение функции $x_T(t)$ становится точ-

---

*) Случайные процессы, реализации которых описываются заданными функциями времени, содержащими один или несколько случайных параметров, не зависящих от времени, относят к классу квазидетерминированных случайных процессов [5].

но известным для любого момента времени $t_i > t_1$:

$$x_i = A\cos\left[\omega_0\left(t_i - t_1\right) + \arccos\left(x_1 / A\right)\right].$$

По этой причине условная плотность вероятности описывается двумерной дельта-функцией от аргументов x_1 и x_i:

$$W_2(x_i \mid x_1) = \delta\left\{x_i - A\cos\left[\omega_0\left(t_i - t_1\right) + \arccos(x_1 / A)\right]\right\} \quad . \quad (6)$$

Моменты времени t_1 и t_i здесь являются параметрами.

Произведение условных плотностей вероятностей $W_2(x_i \mid x_1)$ в (3) задает положение случайного вектора $\mathbf{X}_n$ в n-мерной системе координат $x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n$. При этом случайной (распределенной по закону арксинуса) является лишь координата x_1. Как только она принимает конкретное значение, все остальные координаты $x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_n$ определяются с вероятностью единица. Тем самым из бесконечного числа возможных реализаций гармонического процесса с известными амплитудой и частотой выбирается единственная, имеющая начальную фазу (5).

Одномерная плотность распределения в i-м сечении процесса вычисляется по формуле [5]

$$W_1(x_i) = \int_{-A}^{A} W_1(x_1) W_2(x_i \mid x_1)\, dx_1 \quad .$$

Подставив в нее выражения (4) и (6), после интегрирования получим:

$$W_1(x_i) = W_1(x_1) .$$

Таким образом, безусловные плотности вероятностей одинаковы во всех сечениях процесса. Из этого немедленно следует равенство между собой соответствующих энтропий. Тогда общая энтропия отрезка определится как сумма энтропий во всех его n сечениях:

$$h_{\text{T}} = \sum_{i=1}^{n} H_i = n h_0 \ ,$$

где h_0 - энтропия в любом из сечений. Учитывая очевидное равенство

$$n = \frac{T}{\Delta t} \ ,$$

в котором Δt - интервал разбиения отрезка, получим

$$h_{\text{T}} = \frac{T}{\Delta t} h_0$$

Для гармонической нагрузки удобно принять Δt равным ее периоду. В этом случае отношение Т/Δt будет выражать длину отрезка в циклах гармонического колебания. Следовательно,

$$h_{\mathrm{T}} = N\,h_0. \tag{7}$$

Здесь величина h_0 представляет собой удельную (за период) энтропию гармонического процесса. Определим ее величину для сечения t_1.

Используя равенства (2) и (3), имеем:

$$h_1 = -\int_{-A}^{A}\dots\int_{-A}^{A} W_1(x_1)\prod_{i=2}^{n} W_2(x_i\,|\,x_1)\left[\ln W_1(x_1) + \sum_{i=2}^{n}\ln W_2(x_i\,|\,x_1)\right]dx_1\dots dx_i\dots dx_n =$$

$$= -\int_{-A}^{A}\dots\int_{-A}^{A}\left[W_1(x_1)\ln W_1(x_1)\prod_{i=2}^{n} W_2(x_i\,|\,x_1)\right]dx_1\dots dx_i\dots dx_n -$$

$$-\int_{-A}^{A}\dots\int_{-A}^{A} W_1(x_1)\left[\prod_{i=2}^{n} W_2(x_i\,|\,x_1)\sum_{i=2}^{n}\ln W_2(x_i\,|\,x_1)\right]dx_1\dots dx_i\dots dx_n\ .$$

Изменив порядок интегрирования, получим:

$$h_1 = -\int_{-A}^{A} W_1(x_1)\ln W_1(x_1)\left[\int_{-A}^{A}\dots\int_{-A}^{A}\prod_{i=2}^{n} W_2(x_i\,|\,x_1)\,dx_2\dots dx_i\dots dx_n\right]dx_1 -$$

$$-\int_{-A}^{A} W_1(x_1)\left\{\sum_{i=2}^{n}\int_{-A}^{A} W_2(x_i\,|\,x_1)\ln W_2(x_i\,|\,x_1) * \right.$$

$$\left. *\left[\int_{-A}^{A}\dots\int_{-A}^{A}\prod_{i=2}^{n} W_2(x_i\,|\,x_1)\,dx_2\dots dx_i\dots dx_n\right]\right\}.$$

Фигурирующие здесь многомерные интегралы от произведений условных плотностей вероятностей вычисляются путем последовательного интегрирования по каждой из переменных $x_2,\dots, x_i$,..., x_n и $x_2,\dots,$ x_j ,..., x_n

в отдельности с учетом условий нормировки

$$\int_{-A}^{A} W_2(x_i\,|\,x_1)\,dx_i = 1\,,\quad \int_{-A}^{A} W_2(x_j\,|\,x_1)\,dx_j = 1\,,\ (\,i,j = 1,2,\ldots,n)\,.$$

Тогда

$$h_1 = -\int_{-A}^{A} W_1(x_1)\ln W_1(x_1)dx_1 -$$

$$-\int_{-A}^{A} W_1(x_1)\left[\sum_{i=2}^{n}\int_{-A}^{A} W_2(x_i\,|\,x_1)\ln W_2(x_i\,|\,x_1)\,dx_i\,dx_i\right]dx_1\,.$$

Подставив в первое слагаемое в правой части данного равенства выражение (4) и применив тригонометрическую подстановку $x_1 = A\sin\alpha$, с учетом четности подынтегральной функции находим:

$$h_1 = \ln\frac{\pi A}{2} - \int_{-A}^{A} W_1(x_1)\left[\sum_{i=2}^{n}\int_{-A}^{A} W_2(x_i\,|\,x_1)\ln W_2(x_i\,|\,x_1)\,dx_i\,dx_i\right]dx_1\,.$$

Интеграл, стоящий под знаком суммы во втором слагаемом полученного равенства, есть, по определению [6], взятая с обратным знаком условная энтропия случайной величины x_i. Она является функцией переменной x_i и характеризует неопределенность появления значения x_i в сечении t_i после того, как реализовалось конкретное значение x_1. С позиций классической теории информации появление заданного значения случайного процесса в некоторый момент времени тем неопределенней, чем меньше его условная вероятность. В рассматриваемом случайном процессе после появления значения x_1 любое другое значение x_i, отстоящее от него на произвольный интервал времени $\tau_i = t_i - t_1$, определяется с вероятностью единица и, следовательно, не содержит никакой неопределенности. В этой связи рассматриваемый интеграл должен равняться нулю. Действительно, интерпретируя двумерную дельта-функцию (6) как единичную амплитуду W, сосредоточенную в точке (x_i, x_1), убеждаемся, что

$$\int_{-A}^{A} W_2(x_i\,|\,x_1)\ln W_2(x_i\,|\,x_1)\,dx_i = 0\,.$$

С учетом этого искомое выражение для удельной энтропии принимает следующий окончательный вид:

$$h_0 = \ln\frac{\pi A}{2}.$$

Как видно, удельная (за 1 цикл) энтропия отрезка гармонической нагрузки численно равна энтропии одномерной плотности вероятности закона арксинуса.

Список литературы

1. *Бояринцев В.И., Костин В.И.* Информационная связь параметров нагрузки и усталостной прочности. - Тезисы докладов Международной научно-технической конференции “Проблемы и перспективы развития двигателестроения в Поволжском регионе”. Самара, 1997, с .73...75.
2. *Бетехтин В.И., Журков С.Н.* Временная и температурная зависимость прочности твердых тел. - Проблемы прочности, 1971, № 2, с. 39...43.
3. *Костин В.И.* Сравнительная оценка интенсивности вибрации с переменной во времени амплитудой эквивалентным значением виброскорости гармонических колебаний. - Проблемы прочности, 1974, №9, с. 103...109.
4. *Jaynes E.T.* Information Theory and Statistical Mechanics. The Physical Rewiew, vol. 106, 1957, № 4, pp. 620-630.
5. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. Кн.1. М.: Советское радио. 1966. 728с
6. *Пугачев.В.С.* Теория случайных функций и её применение к задачам автоматического управления и контроля. М. :Гос. издательство физ.-мат. литературы. 1960. 884 с.