АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРА СВЯЗАННОСТИ И КОНЕЧНОСТИ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА НА ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ СТЕНКИ

Загузов И.С., Федечев А.Ф., Жигалин А.Г.
Самарский государственный университет, г. Самара

При исследовании термоупругих напряжений часто возникают вопросы о целесообразности учета влияния поля деформаций и конечности скорости распространения тепла. В данной работе получено решение одномерной нестационарной задачи термоупругости для сферического, цилиндрического и плоского слоев, на основе которого оценивается влияние каждого параметра на характер распространения термоупругих напряжений в слое.

При реализации численных расчетов использован асимптотический метод нахождения собственных чисел.

Взаимосвязанная задача термоупругости для сферического, цилиндрического и плоского слоев описывается следующей системой уравнений [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial r}+\dfrac{\partial q}{\partial r}+\dfrac{n}{r}q+\beta\left(\dfrac{\partial U}{\partial r}+\dfrac{n}{r}U\right)=0 \\ \tau\dfrac{\partial q}{\partial t}+q+\dfrac{\partial T}{\partial r}=0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}-U=0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial t}-\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\sigma_{rr}+T\right)-\dfrac{2\mu n}{r(\lambda+2\mu)}\left(\sigma_{rr}+T\right)+\dfrac{\partial T}{\partial r}+\dfrac{2\mu n[(n+1)\lambda+2\mu]}{r^2(\lambda+2\mu)^2}=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\sigma_{rr}+T\right)-\dfrac{\partial U}{\partial r}-\dfrac{n\lambda}{r(\lambda+2\mu)}U=0 \end{cases}$$

$$U(r,0)=q(r,0)=T(r,0)=\sigma_{rr}(r,0)=u(r,0)=0 \text{ при } t=0, \qquad (1)$$

$$q(R_1,t)=0;\ U(R_1,t)=0 \text{ при } r=R_1,$$

$$T(R_2,t)=f(t);\ \sigma_{rr}(R_2,t)=0 \text{ при } r=R_2.$$

Здесь $r=\dfrac{c\rho c_\varepsilon}{b}\hat{r}$; $t=\dfrac{c^2\rho c_\varepsilon}{b}\hat{t}$; $u=\dfrac{(\lambda+2\mu)c\rho c_\varepsilon}{(3\lambda+2\mu)\alpha bT_0}\hat{u}$; $T=\dfrac{\hat{T}-T_0}{T_0}$;

$$\sigma_{rr} = \frac{\hat{\sigma}_{rr}}{(3\lambda + 2\mu)\alpha T_0}; \qquad q = \frac{\hat{q}}{c\rho c_\varepsilon T_0}; \qquad \beta = \frac{(3\lambda + 2\mu)^2 \alpha^2 T_0}{c^2 \rho^2 c_\varepsilon};$$

$\tau = \dfrac{c^2 \rho c_\varepsilon}{b}\hat{\tau}$; $c = \dfrac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}$; $\hat{r}, t$ - радиальная координата и время, $\hat{U}(\hat{r},\hat{t})$; $\hat{T}(\hat{r},\hat{t})$; $\hat{q}(\hat{r},\hat{t})$; $\hat{\sigma}_{rr}(\hat{r},\hat{t})$; T_0- соответственно радиальная компонента вектора перемещения, абсолютная температура, тепловой поток, компонента тензора напряжений, начальная температура; α - коэффициент линейного расширения; c_ε - удельная объемная теплоемкость при постоянном тензоре деформаций; b - коэффициент теплопроводности; λ, μ, ρ - постоянные Ламе и плотность материала; $n = 0,1,2$ соответственно для плоского, цилиндрического и сферического слоев; $f(t)$ достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условию согласованности $f(0) = 0$.

Используя преобразование Лапласа, систему (1) можно привести к виду:

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dr} + \dfrac{n}{r}\overline{U} = \bar{\chi}_1 \\ \dfrac{d\bar{\chi}_1}{dr} = \bar{\chi}_2 \\ \dfrac{d\bar{\chi}_2}{dr} + \dfrac{n}{r}\bar{\chi}_2 = \bar{\chi}_3 \\ \dfrac{d\bar{\chi}_3}{dr} - \left[s^2(1 + \tau\beta + \tau) + (1 + \beta)s\right]\bar{\chi}_2 + (1 + \tau s)s^3\overline{U} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

$$\overline{U}(R_1, s) = 0;\ \bar{\chi}_2(R_1, s) = 0 \text{ при } r = R_1,$$

$$\bar{\chi}_1 - \frac{2\mu n}{r(\lambda + 2\mu)}\overline{U} = s\bar{f}(s) \text{ при } r = R_2,$$

$$\bar{\chi}_3 - \left[s^2 + (1 + \tau s)\beta\right]\bar{\chi}_1 = s^2(1 + \tau s)\bar{f}(s),$$

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt,$$

$$\overline{U}(r,s)=\int_0^\infty U(r,t)e^{-st}\,dt.$$

Специальные решения системы (2), удовлетворяющие начальным условиям $\overline{U}(R_1,s)=0$; $\bar{\chi}_1(R_1,s)=1$; $\bar{\chi}_2(R_1,s)=\bar{\chi}_3(R_1,s)=0$ при $r=R_1$, а также начальным условиям $\overline{U}(R_1,s)=\bar{\chi}_1(R_1,s)=\bar{\chi}_2(R_1,s)=0$; $\bar{\chi}_3(R_1,s)=1$ при $r=R_1$ выражаются через функции Бесселя первого и второго рода, а также через корни γ_1^2 и γ_2^2 уравнения

$$\gamma^4+\left[s^2(1+\tau\beta+\tau)+(1+\beta)s\right]\gamma^2+(1+\tau s)s^3=0.$$

Коэффициенты системы (2) являются достаточно гладкими функциями r и целыми аналитическими функциями s, следовательно, специальные решения являются целыми аналитическими функциями s. Общее решение рассматриваемой задачи представим линейными комбинациями полученных специальных решений:

$$\overline{U}(r,s)=\sum_{k=1}^{2}c_k\overline{U}^k(r,s);\ \bar{\chi}_1(r,s)=\sum_{k=1}^{2}c_k\bar{\chi}_1^k(r,s);$$

$$\bar{\chi}_2(r,s)=\sum_{k=1}^{2}c_k\bar{\chi}_2^k(r,s);\ \bar{\chi}_3(r,s)=\sum_{k=1}^{2}c_k\bar{\chi}_3^k(r,s).$$

Удовлетворяя граничным условиям, получаем систему уравнений для определения произвольных постоянных c_1 и c_2:

$$\sum_{k=1}^{2}c_k\left[\bar{\chi}_1^k(R_2,s)-\frac{2\mu n}{(\lambda+2\mu)R_1}\overline{U}^k(R_2,s)\right]=s\bar{f}(s);$$

$$\sum_{k=1}^{2}c_k\left[\bar{\chi}_3^k(R_2,s)-\left(s^2+\tau\beta s^2+\beta s\right)\bar{\chi}_2^k(R_2,s)\right]=s^2(1+\tau s)\bar{f}(s).$$

Методом Крамера получаем решение системы:

$$c_k=\frac{s\cdot\Delta_k(s)}{\Delta(s)};\ k=1,2.$$

Здесь $\Delta_k(s)$, $\Delta(s)$ определители Крамера, они являются целыми аналитическими функциями.

Переходя от функций $\overline{U}(r,s)$; $\bar{\chi}_1(r,s)$; $\bar{\chi}_2(r,s)$; $\bar{\chi}_3(r,s)$ к функциям $\overline{T}(r,s)$; $\bar{q}(r,s)$; $\overline{U}(r,s)$; $\bar{\sigma}_{rr}(r,s)+\overline{T}(r,s)$, получаем:

$$\begin{cases}\overline{T}(r,s)=\sum\limits_{k=1}^{2}\left\{\dfrac{\Delta_k(s)}{s(1+\tau s)\Delta(s)}\left[\bar{\chi}_3^k(r,s)-\left(s^2+\beta\tau s^2+\beta s\right)\bar{\chi}_1^k\right]\right\}\bar{f}(s)\\ \bar{q}(r,s)=\sum\limits_{k=1}^{2}\left\{\dfrac{\Delta_k(s)}{(1+\tau s)\Delta(s)}\left[s^2\overline{U}^k(r,s)-\bar{\chi}_2^k(r,s)\right]\right\}\bar{f}(s)\\ \overline{U}(r,s)=\sum\limits_{k=1}^{2}\left\{\dfrac{\Delta_k(s)}{\Delta(s)}\overline{U}^k(r,s)\right\}s\bar{f}(s)\\ \bar{\sigma}_{rr}(r,s)+\overline{T}(r,s)=\sum\limits_{k=1}^{2}\left\{\dfrac{\Delta_k(s)}{\Delta(s)}\left[\bar{\chi}_1^k(r,s)-\dfrac{2\mu n}{r(\lambda+2\mu)}\overline{U}^k(r,s)\right]\right\}\bar{f}(s)\end{cases}$$

Представим изображения в виде произведений:

$$\overline{T}(r,s)=\overline{T}^*(r,s)\bar{f}(s);\ \overline{U}(r,s)=\overline{U}^*(r,s)\bar{f}(s);$$

$$\bar{q}(r,s)=\bar{q}^*(r,s)\bar{f}(s);\ \bar{\sigma}_{rr}(r,s)=\bar{\sigma}_{rr}^*(r,s)\bar{f}(s).$$

Нетрудно показать, что функции $\overline{T}^*(r,s)$; $\overline{U}^*(r,s)$; $\bar{q}^*(r,s)$; $\bar{\sigma}_{rr}^*(r,s)$ всюду аналитичны, кроме нулей определителя $\Delta(s)$. Ограничивая каждый нуль функции $\Delta(s)$ контуром, формулы обращения для рассматриваемых функций со звездочкой можно заменить на сумму интегралов по контурам, каждый из которых содержит по одному полюсу. Интегралы по контуру вычисляются с помощью теории вычетов.

Таким образом, если нули определителя $\Delta(s)$ простые, то решение исходной задачи представляется в следующем виде:

$$\sigma_{rr}(r,t)+T(r,t)=\sum_{k=1}^{2}\left(\int_0^t\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{\Delta_k(s_m)e^{s_m t_0}}{\Delta'(s_m)}\left[\bar{\chi}_1^k(r,s_m)-\frac{2\mu n}{r(\lambda+2\mu)}\overline{U}^k(r,s_m)\right]\right\}f(t-t_0)dt_0\right)$$

$$U(r,t)=\sum_{k=1}^{2}\left(\int_0^t\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{\Delta_k(s_m)e^{s_m t_0}}{\Delta'(s_m)}\overline{U}^k(r,s_m)\right\}f(t-t_0)dt_0\right);$$

$$q(r,t)=\sum_{k=1}^{2}\left(\int_0^t\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{\Delta_k(s_m)e^{s_m t_0}}{(1+\tau s_m)\Delta'(s_m)}\left[s_m^2\overline{U}^k(r,s_m)-\bar{\chi}_2^k(r,s_m)\right]\right\}f(t-t_0)dt_0\right).$$

Анализ нулей функции $\Delta(s)$ производится численным методом. Эффективность численного метода определения нулей зависит от точности начальных приближений. В рассматриваемой задаче начальные приближения корней уравнения $\Delta(s)=0$ получаем из асимптотического решения при $s \to \infty$ исходной задачи.

Запишем систему (1) в матричном виде:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + C\frac{\partial \omega}{\partial r} + B\omega = 0 \qquad (3)$$

Здесь вектор-столбец ω, матрицы C и B имеют вид:

$$\omega = \left(T, q, U, \sigma_{rr} + T, u\right);$$

$$C = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & \beta & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{\tau} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix};$$

$$B = \begin{Vmatrix} 0 & \dfrac{n}{r} & \dfrac{n\beta}{r} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\tau} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{-2\mu n}{r(\lambda+2\mu)} & \dfrac{2\mu n\left[(n+1)\lambda+2\mu\right]}{r^2(\lambda+2\mu)^2} \\ 0 & 0 & \dfrac{-n\lambda}{r(\lambda+2\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Приведем матричное уравнение (3) к каноническому виду. Сделав замену $\omega = Zv$, запишем систему таким образом:

$$\frac{\partial}{\partial t}(Zv) + C\frac{\partial}{\partial r}(Zv) + B(Zv) = 0\,.$$

Умножая последнее уравнение слева на Z^{-1}, получаем следующую смешанную задачу:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + Z^{-1}CZ\frac{\partial v}{\partial r} + \left(Z^{-1}BZ\right)v = 0,$$

$v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v_5 = 0$ при $t = 0$,

$v_1 - v_2 = 0$, $v_3 - v_4 = 0$ при $r = R_1$,

$$v_1 + v_2 = \frac{-f(t)}{\xi_1^2 - \xi_2^2},\ v_3 + v_4 = \frac{f(t)}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \text{ при } r = R_2,$$

где ξ_1, ξ_2 - корни уравнения $\tau\xi^4 - (\beta + \tau + \tau + 1)\xi^2 + 1 = 0$.

Применяя к этой системе преобразование Лапласа и ограничиваясь в полученной системе при больших значениях s слагаемыми первого порядка малости, получим общее решение в виде:

$$\bar{v}_1(r,s) = \frac{c_1}{r^{n/2}} e^{-\frac{s+\kappa_1}{\xi_1} r};\ \bar{v}_2(r,s) = \frac{c_2}{r^{n/2}} e^{\frac{s+\kappa_1}{\xi_1} r};$$

$$\bar{v}_3(r,s) = \frac{c_3}{r^{n/2}} e^{-\frac{s+\kappa_2}{\xi_2} r};\ \bar{v}_{41}(r,s) = \frac{c_4}{r^{n/2}} e^{\frac{s+\kappa_2}{\xi_2} r}.$$

Отсюда определяем простые нули функции:

$$S_m = -\kappa_1 \pm i\frac{(2m+1)\pi}{2(R_2 - R_1)}\xi_1;\ S_m = \kappa_2 \pm i\frac{(2m+1)\pi}{2(R_2 - R_1)}\xi_2 \quad (4)$$

Следует отметить, что в выражение (4) не входит параметр n. Следовательно, асимптотические значения нулей не зависят от того, какой рассматривается слой (сферический, цилиндрический или плоский). Для уточнения асимптотических корней применяется метод Ньютона:

$$S_m^{k+1} = S_m^k - \frac{\Delta(S_m^k)}{\Delta'(S_m^k)}.$$

При расчете принимались следующие значения безразмерных параметров: $\nu = 0.34$, $\tau = 1.1051$, $\beta = 0.035$, $R_1 = 0.5$, $R_2 = 1$.

Сравнение численных и асимптотических нулей определителя подтверждает хорошее приближение асимптотического решения, причем с ростом номера точность нуля возрастает. Это позволяет, начиная с некоторого номера, пользоваться асимптотическими значениями нулей без уточнения.

По предложенной математической модели была произведена оценка влияния параметра связанности и конечности скорости распространения тепла на термоупругое состояние стенки. Из анализа полученных результатов следует, что связанность поля деформаций с полем температур существенно сказывается на фронте волны возмущения только в обобщенных задачах. В задачах с классическим законом Фурье влияние коэффициента взаимосвязанности незначительно.

Список литературы

1. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. - Киев: Наукова думка, 1976 г.