Получены асимптотические представления частотных уравнений продольных колебаний и формул для частот колебаний. Разработана методика решения обратных задач для вибрирующих стержней, согласно которой строятся профили или распределяется материал в стержнях с экстремальными частотами продольных колебаний, при выполнении ряда ограничений и связей, накладываемых на проектируемые стержни.

Список использованных источников

1. Гордон В.А. Асимптотические представления частот собственных продольных колебаний неоднородных стержней.// Сборник научных трудов ОрелГПИ, т.5, Орел, 1994.
2. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения.-М.:Издатинлит, 1962,-217 с.

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ СТОКСА О СВЯЗИ АНТИСИММЕТРИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ K – ФОРМ

Шоркин В.С.

Предлагаются рассуждения о связи 1, 2, 3 – форм, определенных на цепях, построенных на основе ребер куба в трехмерном евклидовом пространстве, его граней и внутренности соответственно. Они основаны на теореме Стокса об интегральной связи $(k-1)$ и k – форм в n – мерном евклидовом пространстве.

Рассуждения могут служить основой для утверждения о том, что действие распределенных вдоль ребер куба и его граней сил порождает напряженное состояние материала, заполняющего его, описываемое тензорами напряжений не только второго, но и третьего ранга. При этом появляется возможность описывать взаимодействие внутренней части тела и его приповерхностного слоя как взаимодействие трехмерного и двухмерного тел.

Возможность изменять поверхностные свойства посредством лазерной, термической, радиационной или какой – либо другой обработки дает основание считать ее двухмерным телом, находящимся в контакте с трехмерным. Для учета этого наряду с функционалом внутренней потенциальной энергии упругого трехмерного тела можно допустить рассмотрение аналогичного функционала его поверхности. Контакт тела и поверхности учитывается минимизацией суммы этих функционалов [1]. Далее предлагаются рассуждения, дополняющие это положение, показывающие, на какой основе можно описать влияние напряженного состояния поверхности на состояние тела, ограниченного ею.

1. Рассматривается шестигранник $I^3 \in E^3$ с гранями $I^3_{i,\alpha}$ $(i=1,2,3;\alpha=0,1)$. введена координатная система (u^i), в которой:

$$I^3: \quad \alpha^j \le u^j \le \beta^j; \quad I^3_{i,0}: \ u^j = \alpha^j; \quad I^3_{i,1}: \ u^j = \beta^j \qquad (1)$$

радиус – вектор $M \in E^3$ определяется равенством $\vec{R} = \vec{e}_k x^k$, $(\vec{e}_k)$ – ортонормированный базис для точек $N \in I^3$ используется базис $(\vec{R}_j)$: $\vec{R}_j = \dfrac{\partial \vec{R}}{\partial u^j} = \vec{e}_k \dfrac{\partial x^k}{\partial u^j}$. I^3 является $3-$ цепью, определенной в E^3. строится также 2 - цепь [2]:

$$\partial I^3 = \sum_{i=1}^{3} [(-1)^i I^3_{i,0} + (-1)^{i+1} I^3_{i,1}] = \sum_{i=1}^{3} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{i+\alpha} I^3_{i,\alpha} \qquad (2)$$

Элемент объема dI^3 определяется равенством [3]:

$$dI^3 = \sqrt{G} du^1 \wedge du^2 \wedge du^3 = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \sqrt{G} du^1 du^2 du^3 \qquad (3)$$

$$G = \left| det(G_{ij}) \right|; \quad G_{ij} = \vec{R}_i \cdot \vec{R}_j .$$

Это дифференциальная антисимметричная $3-$форма в E^3 [2] выражение

$$\Omega = f(\vec{R})\, dI^3 = f(\vec{R})\ dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \qquad (4$$

также является $3-$формой, определенной в окрестности точки $\vec{R} \in E^3$ Используя правило [4]

$$(*A)_{i_{k+1}\dots i_n} = \Gamma_{i_{k+1}\dots i_n} = \frac{1}{k!}\sqrt{G}\ \varepsilon_{i_1\dots i_n}\ A^{i_1\dots i_k}, \qquad (5$$

где $A^{i_1 \dots i_k}$ – какой – то тензор ранга k, определенный в $\dot{E}^n$; $(*A)_{i_{k+1} \dots i_n} = \Gamma_{i_{k+1} \dots i_n}$ – его дополнение ранга $(n-k)$ в E^n, форме (4), а значит и $f(\vec{R})$, можно поставить во взаимно однозначное соответствие форму

$$\omega = T_{ijk}\, dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k = 6T_{123}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \qquad (6)$$

и соответственно тензор T с компонентами $T_{ijk} = T_{123}\varepsilon_{ijk}$. Ее внешний дифференциал

$$\partial\,\omega = \frac{\partial(6T_{123})}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = 0\,, \qquad (7)$$

Отсюда (теорема Пуанкаре [2]) следует, что существует окрестность произвольной точки $\vec{R} \in I^3$, в которой определена некоторая 2 – форма

$$\gamma = 6t_{12}\, dx^1 \wedge dx^2 + 6t_{13}\, dx^1 \wedge dx^3 + 6t_{23}\, dx^2 \wedge dx^3. \qquad (8)$$

Она удовлетворяет равенству: $\partial\,\gamma = \omega$. Тогда

$$\partial\,\gamma = 6\left(\frac{\partial t_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial t_{23}}{\partial x^1} - \frac{\partial t_{13}}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \qquad (9)$$

В соответствии с (5), компонентам t_{ij} тензора $\mathbf{t}$ можно поставить в соответствие компоненты a^k вектора $\vec{a}$. В результате окажется, что

$$f(\vec{R})\, dI^3 = \left(\frac{\partial a^i}{\partial x^i}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \qquad (10)$$

То есть, $f(\vec{R})$ является дивергенцией некоторого вектора $\vec{a}$. Если $f(\vec{R}) \equiv \vec{a}$, то существует такой тензор A, что $\vec{a} = \nabla \cdot A$.

для формы (8) справедлива теорема Стокса [2]:

$$\int_{I^3} \partial\gamma = \int_{\partial I^3} \gamma \tag{11}$$

на грани $I^3_{1,\alpha}$ (на других гранях аналогично) справедливы преобразования:

$$t_{23} du^2 \wedge du^3 = \left(a^1 \sqrt{G}\right) \vec{R}_1 \cdot \vec{R}^1 du^2 du^3 =$$
$$\left(a^1 \vec{R}_1\right) \frac{\left(\vec{R}_2 \times \vec{R}_3\right)}{\left|\vec{R}_2 \times \vec{R}_3\right|} \left|\vec{R}_2 \times \vec{R}_3\right| du^2 du^3 =$$
$$= \left(-1\right)^{1+\alpha} \vec{a} \cdot \vec{n}_{(1,\alpha)}\, dI^3_{1,\alpha}, \tag{12}$$

Результатом является преобразование равенства (11) в формулу Остроградского.

при $i = 1, \alpha = 1$ (для других граней I^3 можно провести аналогичные рассуждения) можно получить:

$$dI^3_{1,1} = \left|\vec{R}_2 \times \vec{R}_3\right| du^2 du^3 = \left|det\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^j}\right)\right| du^2 du^3 = \sqrt{g_{(1)}} du^2 \wedge du^3; \tag{13}$$

Запись (13) инвариантна по отношению к преобразованию системы du^j; $i, j = 2,3$ в какую – либо другую. В любой точке грани $I^3_{i,1}$ выражение $\vec{a} \cdot \vec{n}_{(1,1)}$ является скаляром, независящим от выбора системы координат на $dI^3_{1,1}$. Следовательно, выражение $\vec{a} \cdot \vec{n}\left(1,\alpha\right) dI^3_{1,\alpha}$ является $2-$ формой на многообразии $I^3_{i,\alpha}$, имеющем два измерения, не зависящей от аналогичных форм или их элементов, определенных на других гранях.

2. предполагается, что вектор $\vec{a}$ является дивергенцией некоторого тензора второго ранга A. С учетом этого можно осуществить следующие преобразования:

$$\vec{a} \cdot \vec{n}_{(3,1)} dI^3_{(3,1)} = a^3 n_{(3,1)3} \sqrt{g_{(3,1)}} du^1 du^2 =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{G}}\nabla_\alpha\left(A^{\alpha 3}\sqrt{G}\right)n_{(3,1)3}\sqrt{g_{(3,1)}}du^1du^2+$$

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\nabla_3\left(A^{33}\sqrt{G}\right)n_{(3,1)3}\sqrt{g_{(3,1)}}du^1du^2 \qquad (14)$$

первое слагаемое последнего выражения можно представить в виде

$$\frac{1}{\sqrt{g_{(3,1)}}}\nabla_\alpha\left(A^{\alpha 3}\sqrt{g_{(3,1)}}n_{(3,1)3}\right)dI^3_{3,1}-A^{\alpha 3}\frac{1}{\sqrt{g_{(3,1)}}}\nabla_\alpha\left(n_{(3,1)3}\sqrt{g_{(3,1)}}\right)dI^3_{3,1} \qquad (15)$$

Здесь первое слагаемое является $2-$формой на двухмерном многообразии $I^3_{3,1}$

$$\omega_3=\frac{1}{\sqrt{g_{(3,1)}}}\nabla_\alpha\left(A^{\alpha 3}\sqrt{g_{(3,1)}}n_{(3,1)3}\right)dI^3_{3,1}=$$

$$\nabla_\alpha\left(A^{\alpha 3}\sqrt{g_{(3,1)}}n_{(3,1)3}\right)dv^1\wedge dv^2 \qquad (16)$$

Её дифференциал $\partial\omega_3=0$, поэтому существует такая $1-$форма

$$\gamma_3=-A^{23}n_{(3,1)3}\sqrt{g_{(3,1)}}dv^1+A^{13}n_{(3,1)3}\sqrt{g_{(3,1)}}dv^2 \qquad (17)$$

которая удовлетворяет равенству $\omega_3=\partial\gamma_3$. Из элементов границы области $I^3_{3,1}$ можно построить цепь

$$\partial I^3_{3,1}=\sum_{\alpha=0}^{1}\sum_{\Delta=0}^{1}(-1)^{\alpha+\Delta+!}\,I^3_{3,1(\alpha.\Delta)} \qquad (18)$$

После этого для области $I^3_{3,1}$ и формы γ_3 можно воспользоваться теоремой Стокса

$$\int\limits_{\partial I^3_{3,1}} \gamma_3 = \int\limits_{I^3_{3,1}} \partial\gamma_3 \tag{19}$$

Для преобразования (19) в формулу Остроградского определяется внешняя по отношению к $I^3_{3,1}$ единичная нормаль. Она расположена в касательной к $I^3_{3,1}$ плоскости, построенной в точке определения этого вектора, например, на участке $I^3_{3,1(0,0)}$ – это вектор $\overrightarrow{N}_{(3,1)(0,0)}$. Тогда справедливо равенство

$$A^{23} n_{(3,1)3} \sqrt{g_{(3,1)}}\, du^1 = -A^{23} n_{(3,1)3} N_{(3,1)(0,0)2}\, dI^3_{3,1(0,0)} \tag{20}$$

Аналогичные соотношения можно построить для других гладких участков $I^3_{3,1(\alpha,\Delta)}$ грани $I^3_{3,1}$. В результате формула Остроградского для этой грани получает вид

$$\int\limits_{I^3_{3,1}} \frac{1}{\sqrt{g_{(3,1)}}} \nabla_\alpha \left(A^{\alpha 3} n_{(3,1)3} \sqrt{g_{(3,1)}} \right) dI^3_{3,1} = \int\limits_{\cup I^3_{3,1(\beta,\Delta)}} A^{\alpha 3} n_{(3,1)} N_{(3,1)(\beta,\Delta)\alpha}\, dI^3_{3,1(\beta,\Delta)} \tag{21}$$

Точно такие же результаты можно получить для всех граней рассматриваемого шестигранника.

3. Классический подход к описанию напряженного состояния в трехмерном теле, предполагая что $f(\overrightarrow{R}) \equiv \vec{a}$ – вектор объемных сил, определенных внутри I^3, ограничивается лишь первым шагом приведенных выше рассуждений. Тогда A – это тензор внутренних напряжений, для которого на каждой из граней $I^3_{i,\alpha}$ выполняется условие: $\vec{n} \cdot A = \vec{\sigma}$, где – внешнее поверхностное воздействие.

Учет проведенных рассуждений означает, что грани шестигранника, рассматриваемые как двухмерные тела, очевидно, могут подвергаться действию распределенных вдоль их ребер и поверхности сил с интенсивностями $\vec{\tau}$ и $\vec{\sigma}$ соответственно. Под действие первых развиваются на пряжения, описываемые тензором второго ранга $B : \vec{N} \cdot B = \vec{\tau}$. Силы $\nabla_\alpha \cdot B$ (∇_α – поверхностный градиент) наряду с $\vec{\sigma}$ являются поверхностными для шестигранника. Поэтому, если внешние силы $\vec{\sigma}$ вызывают развитие в нем напряжений, описываемых тензором второго ранга $P : \vec{n} \cdot P = \vec{\sigma}$, то "силы" B приводят к появлению напряжений, описываемых тензором третьего ранга $Q : \vec{n} \cdot Q = B$.

В классическом случае объемные $\vec{a}$ и поверхностные $\vec{\sigma}$ силы связаны между собой через тензор P как через "параметр" соотношениями: $\vec{n} \cdot P = \vec{\sigma}$, $\nabla \cdot P = \vec{a}$. В рассмотренном в данной работе случае появляется дополнительный "параметр" – тензор Q. связь $\vec{\tau}$, $\vec{\sigma}$, $\vec{a}$ становится сложнее. связь $\vec{\tau}$, $\vec{\sigma}$, $\vec{a}$ должна быть установлена посредством соотношений, вытекающих, например, из вариационного принципа, предложенного в [1], использующих в качестве "параметров" как P так и Q.

Список использованных источников

1. Дьяконов Е.Г. Энергетические пространства и их применение. – М.: МГУ, 2001.– 208 с.
2. Грауерт Г., Либ И., Фишер В. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Мир, 1971. – 680 с.
3. Шилов Г.Е. Математический анализ (функции нескольких вещественных переменных) – ч. 1 – 2. – М.: Наука, 1972. – 624 с.
4. Дудровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. –М.: Наука, 1979. – 760 с.

УДК 681.3.068

ТЕСТИРОВАНИЕ ПРОГРАММНЫХ МОДУЛЕЙ НА ОСНОВЕ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Коварцев А.Н., Логвинов А.Л.

Предлагается метод тестирования программных модулей, основанный на использовании алгоритмов глобальной оптимизации. Проблема тестирования модулей сводится к задаче поиска у функции разрывов второго рода.

Несмотря на обнадеживающие результаты, полученные для метода независимых испытаний [1], особенно с использованием корректировки разрядной сетки, он существенно теряет свою эффективность с повышением размерности вектора исходных данных тестируемого модуля. В связи с чем, была предпринята попытка разработки детерминированного метода локализации ошибок в программных модулях вычислительного характера.