УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ РЭА

Овсянникова С.Н.

Построена фундаментальная система решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, описывающего свободные продольные колебания стержня, с произвольными законами изменения жесткости и плотности вдоль оси ξ; при гармонических колебаниях уравнение форм колебаний имеет вид:

$$\frac{d}{d\xi}\left[G(\xi)\frac{dW}{d\xi}\right]+P^2S(\xi)W=0, \qquad (1)$$

где ξ – осевая координата; $W=W(\xi)$ – безразмерное продольное перемещение.

Актуальность исследования консольных вибрирующих стержней обусловлена разнообразием объектов, моделируемых указанными стержнями.

Предлагаемый подход к исследованию и проектированию консольных вибрирующих стержней базируется на возможности использования построенных замкнутых аналитических решений задач на собственные значения для стержней с произвольными законами изменения жесткости и плотности вдоль оси.

Основная идея метода построения приближенных аналитических решений сводится к построению дифференциального уравнения, имеющего строгое решение и близкого к исходному (1), которое не решается непосредственно, и последующей оценке степени точности полученных таким способом решений исходной задачи.

Такой подход к поиску приближенных решений дифференциального уравнения с переменными коэффициентами, когда точное решение не просматривается, представляется рациональным, поскольку в этом случае строятся точные решения определенным образом измененной первоначальной задачи и это изменение легче истолковать, чем какое-либо приближение, сделанное в ходе численного или иного приближенного решения.

Точные решения исходного уравнения строятся в виде бесконечных рядов с первым приближением $f_j(\xi)$

$$W_j(\xi)=f_j(\xi)+\int_0^{\xi}H(\xi,z)g(z)f_j(z)dz+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\xi}H(\xi,z)\left[\int_0^{\xi}P^{(n)}(z,\eta)g(\eta)f_j(\eta)d\eta\right]dz \qquad (2)$$

где $f_j = \alpha \exp\left(\varepsilon_j p \int_0^{\xi} \beta(z) dz \right), \varepsilon_1 = i, \varepsilon_2 = -i, \alpha = (SG)^{-\frac{1}{4}}, \beta = (S/G)^{\frac{1}{2}}$

$H(\xi, z) = \frac{i}{2} g(\xi)(f_1(z) f_2(\xi) - f_1(\xi) f_2(z)), P^n(\xi, z)$ – есть n-я итерация ядра P.

При этом общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$W = \sum_{j=1}^{2} c_j W_j(\xi) \tag{3}$$

Подстановка в граничные условия общих решения вида (3) и их производных приводит к однородной системе уравнений относительно констант c_j. Условие существования ненулевых решений этой системы дает уравнение частот. Ненулевое решение определяет форму колебаний. Для консольного стержня получены асимптотические представления с остаточным членом $O(P^{-2})$.

$$T_0(P) + \frac{1}{p} T_1(P) + O(P^{-2}) = 0 \ , \tag{4}$$

где P – частота собственных колебаний; T_0, T_1 – известные функции.

Применение к уравнению (4) теоремы о нулях функции с известным асимптотическим представлением /2/ позволяет получить асимптотические выражения для собственных частот продольных колебаний консольных неоднородных стержней.

$$P_n = \frac{(2n-1)\pi}{2\int_0^1 \sqrt{S(\xi)/G(\xi)} d\xi} + \frac{2}{(2n-1)\pi} \left(\frac{\alpha'(1)}{\alpha(1)\beta(1)} - \int_0^1 \frac{g(\xi)}{\sqrt{S(\xi)G(\xi)}} \right) + O(P^{-2})$$

Полученные соотношения для частот собственных продольных колебаний стержней произвольной переменной жесткости и плотности позволяют получать оптимальные решения в явной форме. Такая возможность является эффективным средством получения приближенных решений с целью исследования различных свойств оптимальных конструкций, выделения основных факторов, определяющих их облик и структуру.

Актуальность исследования оптимизационных задач обусловлена важностью решаемых прикладных проблем снижения массы вибрирующих систем.

В задачах оптимизации частоты продольных колебаний консольного стержня в качестве искомых управляющих функций последовательно рассматриваются: распределения площадей при фиксированном положении осевой линии и распределения плотностей материала стержня вдоль оси.

Для построения функционалов задач оптимизации используется формула для частот продольных колебаний, а также ряд дополнительных ограничений, входящих в функционал с множителями и функциями Лагранжа. В качестве дополнительных ограничений используются: условия постоянства массы; условия, позволяющие учесть формы колебания неоднородного стержня; условия, устанавливающие минимальную плотность материала или минимальную площадь поперечного сечения стержня. После построения функционала задачи для отыскания управляющих функций используется вариационная техника.

При отыскании оптимального распределения площадей консольного стержня, при постоянных значениях плотности и модуля упругости материала, из условия максимума частот продольных колебаний, функционал задачи принят в виде:

$$P_n = \frac{\pi(2n-1)}{2}\sqrt{\frac{E}{\rho}} + \frac{2}{\pi(2n-1)}\left(\frac{\alpha'(1)}{\alpha(1)\beta(1)} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\int_0^1\left(2\frac{A''}{A} - \left(\frac{A'}{A}\right)^2\right)d\xi\right) +$$

$$+\mu_1\left(\int_0^1 A(\xi)d\xi - 1\right) + \mu_2\left(\int_0^1 A^{-\frac{1}{2}}(\xi)(2n-1)\pi\cos\frac{2n-1}{2}\pi\xi d\xi - const\right) + \int_0^1 \mu_3(\xi)\left[A - A_{\min} - C^2(\xi)\right]d\xi$$

Условие стационарности функционала относительно переменных A и C дает два уравнения:

$$\left(\frac{A''}{A^2} - \frac{(A')^2}{A^3}\right) + \mu_1 + \mu_2 A^{-\frac{3}{2}}\cos\frac{2n-1}{2}\pi\xi + \mu_3(\xi) = 0,\ \mu_3(\xi)C(\xi) = 0\,.$$

Из последнего соотношения следует

1) $\mu_3(\xi) \neq 0, \quad C(\xi) = 0$ во всем диапазоне изменения аргумента.

Тогда рассматриваемый стержень есть стержень постоянной жесткости.

2) $\mu_3(\xi) \neq 0, \quad C(\xi) = 0$ или $C(\xi) = 0$.

Разрешая уравнение (8), получаем оптимальные законы изменения площади поперечного сечения консольного стержня для различных форм колебания на участках переменной жесткости.

$$A(\xi) = A_0\left(\cos\frac{2n-1}{2}\pi\xi\left(1 - r^{1/2}\right) + r^{1/2}\right)^2, \quad \text{где } r = \frac{A_k}{A_0}\,.$$

Для форм колебаний выше первой полученные законы, в ряде случаев, приводят к необходимости введения участков постоянной жесткости, на которых $(\xi) = 0, A = A_{min}$. Чем выше частота собственных продольных колебаний, тем больше число чередующихся участков постоянной и переменной жесткости.

Например, для второй формы колебаний, если $A_k \neq A_{\min}, r \leq 0.5$ получен следующий закон изменения площади по длине:

$$A(\xi) = \begin{cases} A_0\left(\left(1-r^{1/2}\right)\cos\frac{3}{2}\pi\xi + r^{1/2}\right)^2, 0 \leq \xi \leq \eta_1 \\ A_{\min},\ \eta_1 \leq \xi \leq \eta_2 \\ A_0\left(\left(1-r^{1/2}\right)\cos\frac{3}{2}\pi\xi + r^{1/2}\right)^2, \eta_2 \leq \xi \leq 1 \end{cases},$$

где η_1, η_2 - координаты сопряжения участков постоянной и переменной площади, найденные из следующего соотношения:

$$\left(\frac{A_{\min}}{A_0}\right)^{1/2} = \left(1-r^{1/2}\right)\cos\frac{3}{2}\pi\eta_i + r^{1/2}$$

Законы изменения площади поперечного сечения близкие к оптимальным дают меньшие частоты, чем полученные оптимальные законы. Это косвенно подтверждает, что найденные экстремумы являются максимумами.

Аналогичные построения позволяют получить оптимальные законы изменения плотности вдоль оси консольного стержня.

Найденные оптимальные стержни состоят из чередующихся участков постоянной и переменной плотности.

Например, при n=1 закон изменения плотности вдоль оси имеет вид:

$$\rho(\xi) = \begin{cases} \rho_0\left(\cos\frac{\pi\xi}{2}\right)^{\frac{4}{3}}, 0 \leq \xi \leq \eta \\ \rho_{\min}, \eta \leq \xi \leq 1 \end{cases}, \text{ где } t = \frac{\rho_0'}{\rho_0}.$$

Координаты сопряжения участков постоянной и переменной плотности находятся из соотношений:

$$\eta_k = \frac{2}{\pi(2n-1)}\left(\pm\arccos r^{3/4} + \pi k\right), k \in Z,$$

Из условия постоянства массы, задаваясь различными значениям параметров k, t, последовательно находятся $\rho_0, \rho_{\min}, \rho_0'$.

В работе предложены новые подходы в решении задач на собственные значения для консольных прямолинейных стержней с произвольно изменяющимися вдоль оси жесткостью и плотностью.

Получены асимптотические представления частотных уравнений продольных колебаний и формул для частот колебаний. Разработана методика решения обратных задач для вибрирующих стержней, согласно которой строятся профили или распределяется материал в стержнях с экстремальными частотами продольных колебаний, при выполнении ряда ограничений и связей, накладываемых на проектируемые стержни.

Список использованных источников

1. Гордон В.А. Асимптотические представления частот собственных продольных колебаний неоднородных стержней.// Сборник научных трудов ОрелГПИ, т.5, Орел, 1994.
2. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения.-М.:Издатинлит, 1962,-217 с.

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ СТОКСА О СВЯЗИ АНТИСИММЕТРИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ K – ФОРМ

Шоркин В.С.

Предлагаются рассуждения о связи 1, 2, 3 – форм, определенных на цепях, построенных на основе ребер куба в трехмерном евклидовом пространстве, его граней и внутренности соответственно. Они основаны на теореме Стокса об интегральной связи $(k-1)$ и $k-$форм в $n-$мерном евклидовом пространстве.

Рассуждения могут служить основой для утверждения о том, что действие распределенных вдоль ребер куба и его граней сил порождает напряженное состояние материала, заполняющего его, описываемое тензорами напряжений не только второго, но и третьего ранга. При этом появляется возможность описывать взаимодействие внутренней части тела и его приповерхностного слоя как взаимодействие трехмерного и двухмерного тел.

Возможность изменять поверхностные свойства посредством лазерной, термической, радиационной или какой – либо другой обработки дает основание считать ее двухмерным телом, находящимся в контакте с трехмерным. Для учета этого наряду с функционалом внутренней потенциальной энергии упругого трехмерного тела можно допустить рассмотрение аналогичного функционала его поверхности. Контакт тела и поверхности учитывается минимизацией суммы этих функционалов [1]. Далее предлагаются рассуждения, дополняющие это положение, показывающие, на какой основе можно описать влияние напряженного состояния поверхности на состояние тела, ограниченного ею.

1. Рассматривается шестигранник $I^3 \in E^3$ с гранями $I^3_{i,\alpha}$ $(i=1,2,3;\alpha=0,1)$. введена координатная система (u^i), в которой: