ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ

Микерин С.В.

Моделирование является основным методом исследования во всех областях знаний и научно обоснованным методом оценок характеристик сложных систем, используется для принятия решения в различных сферах инженерной деятельности. Существующие и проектируемые системы можно эффективно исследовать с помощью математических моделей (аналитических и имитационных), реализуемых на современных ЭВМ, которые в этом случае выступают в качестве инструмента экспериментатора с моделью системы.

В настоящее время при анализе и синтезе сложных систем получил развитие системный подход, который отличается от классического тем, что предполагает последовательный переход от общего к частному, когда в основе рассмотрения лежит цель, причем исследуемый объект выделяется их окружающей среды. Важным для системного подхода является определение структуры системы – совокупности связей между элементами системы, отражающих их взаимодействие.

Одним из наиболее важных аспектов построения системы моделирования является проблема цели. Любую модель строят в зависимости от цели, которую ставит перед собой исследователь, поэтому одна из основных проблем при моделировании – это проблема целевого назначения. Подобие процесса, протекающего в модели, реальному процессу является не целью, а условием правильного функционирования модели, и поэтому в качестве уели должна быть поставлена задача изучения какой-либо стороны функционирования объекта.

Если цель моделирования ясна, то возникает проблема построения модели. Построение модели оказывается возможным, если имеется информация или выдвинуты гипотезы относительно структуры, алгоритмов и параметров исследуемого объекта.

Выбор той или иной аналогии, выбор того или иного математического аппарата моделирования полностью основывается на имеющемся опыте исследователя и ошибка исследователя может привести к ошибочным результатам моделирования.

В основе моделирования лежит теория подобия, которая утверждает, что абсолютное подобие может иметь место лишь при замене одного объекта другим точно таким же. При моделировании абсолютное подобие не имеет места и стремиться к тому, чтобы модель достаточно хорошо отображала исследуемую сторону функционирования объекта.

Для исследования характеристик процесса функционирования любой системы математическими методами, включая и машинные, должна быть проведена формализация этого процесса, т.е. построена математическая модель.

Под математическим моделированием понимают процесс установления соответствия данному реальному объекту некоторого математического объекта, называемого математической моделью. Вид математической модели зависит как от природы реального объекта, так и задач исследования объекта и требуемой достоверности и точности решения этой задачи. Любая математическая модель, как и всякая другая, описывает объект лишь с некоторой степенью приближения к действительности. Математическое моделирование для исследования характеристик процесса функционирования систем разделяется на аналитическое, имитационное и комбинированное.

Для аналитического моделирования характерно то, что в процессе функционирования элементов системы записываются функциональные соотношения (алгебраические, интегро-дифференциальные, конечно-разностные и т.п.) или логические условия. Аналитическая модель может быть получена следующими методами:

а) аналитически, когда стремятся получить в общем виде явные зависимости для искомых характеристик;

б) численными методами, не умея решать уравнение в общем виде, стремятся получить численные результаты при конкретных начальных условиях;

в) качественными, когда не имея решения в явном виде, можно найти некоторые свойства решения (например, оценить устойчивость решения).

Наиболее полное исследование процесса функционирования системы можно провести, если известны явные зависимости, связывающие искомые параметры с начальными условиями, параметрами и переменными системы. Однако, такие зависимости удается получить только для сравнительно простых систем. Численный метод позволяет исследовать по сравнению с аналитическим методом более широкий класс систем, но при этом полученные решения носят частный характер. Численные методы особенно эффективно при использовании ЭВМ.

При имитационном моделировании реализующий модель алгоритм воспроизводит процесс функционирования системы. Основным преимуществом данного метода по сравнению с аналитическим является возможность решения более сложных задач.

Комбинированное моделирование при анализе и синтезе систем позволяет объединить достоинства аналитического и имитационного моделирования.

Необходимость численного моделирования. Как бы глубоки и разнообразны ни были методы качественного анализа математических моделей, область их применения весьма ограничена. Это – либо простые, линейный модели, либо отдельные фрагменты сложных, в том числе нелинейных моделей. Единственным универсальным способом исследования моделей является применение численных методов для нахождения приближенного решения поставленной задачи с помощью средств современной вычислительной техники и информатики.

Доступный «пониманию» компьютера вычислительный алгоритм должен удовлетворять весьма жестким и подчас противоречивым требованиям. К ним относится, прежде всего, необходимость получить решение с заданной точностью по возможности за минимальное число действий. Объемы обрабатываемой при этом информации не могут превышать возможности емкости машинной памяти, в процессе вычисления нельзя допускать слишком больших или слишком маленьких чисел, структура алгоритма должна быть достаточно простой и учитывать архитектуру вычислительной системы.

Только отвечающие этим требованиям вычислительные алгоритмы позволяют проводить всестороннее численное исследование исходной модели, подвергать ее вычислительному эксперименту, проводя ее анализ в самых различных ситуациях, и получать исчерпывающую информацию об изучаемом объекте. Такое понимание математического моделирования означает не просто уточнение количественных характеристик явлений, но также изучение основных ее качественных свойств. Последнее важно прежде всего для нелинейных объектов, поведение которых может быть разнообразным и неожиданным.

Но разработка эффективных вычислительных алгоритмов всегда остается одной из ключевых задач математического моделирования. Для их конструирования широко используются методы, идеи и подходы, применяемые при построении исходных математических моделей. Эта связь хорошо прослеживается на примере широкого класса моделей, которые сводятся к дифференциальным уравнениям.

Применение численного моделирования для анализа теплового поля.

Разобьем изотропное тело на части прямоугольной формы, каждую часть полученного разбиения будем считать отдельным элементом.

Уравнение теплопроводности изотропного тела в дифференциальной форме имеет вид:

$$\lambda\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)+q_V=C_P\rho\frac{\partial t}{\partial \tau}, \qquad (1)$$

где λ - коэффициент теплопроводности материала;

t – температура;

q_V - удельная мощность выделения внутренних источников;

C_P - теплоемкость тела при постоянном давлении;

ρ - плотность;

τ - время.

Запишем типовое уравнение движения теплоты. Для этого воспользуемся законом сохранения тепловой энергии: количество притекающей к данному элементу энергии равно количеству утекающей энергии плюс количество накапливающейся энергии в элементе.

Количество энергии, притекающей и утекающей через боковые поверхности каждого из рассматриваемых элементов, выражается через величину плотности тепловых потоков.

Удельная плотность теплового потока J определяется количеством теплоты, проходящей через единичную площадь в единицу времени.

Таким образом, баланс количества теплоты за время τ для элемента можно записать в виде соотношения:

$$\left(J_X^+ - J_X^-\right)h_Y h_Z \tau + \left(J_Y^+ - J_Y^-\right)h_X h_Z \tau + \left(J_Z^+ - J_Z^-\right)h_X h_Y \tau = C\Delta t. \qquad (3)$$

С учетом тепла, выделяющегося за счет превращения электрической энергии в тепловую, получим уравнение вида:

$$\frac{J_X^+ - J_X^-}{h_X} + \frac{J_Y^+ - J_Y^-}{h_Y} + \frac{J_Z^+ - J_Z^-}{h_Z} + q = C\frac{t_{i,j,k}^{S+1} - t_{i,j,k}^{S}}{\tau}. \qquad (4)$$

Так как удельное тепловыделение определяется как количество теплоты, выделяемое в единице объема в единицу времени, то мы просто добавили соответствующий член к левой части уравнения (4), так как оно вносит тепло в рассматриваемый объем.

Теперь выразим плотность потоков J через температуры в узлах сетки. Для этого воспользуемся гипотезой о линейности свойств среды – законом Фурье. Этот закон говорит о том, что плотность теплового потока между двумя точками пропорциональна разности температур между этими точками и обратно пропорциональна расстоянию между ними.

Таким образом, получим:

$$J_X^+ = K\frac{t_{i+1,j,k} - t_{i,j,k}}{h_X}; \qquad J_X^- = K\frac{t_{i,j,k} - t_{i-1,j,k}}{h_X};$$

$$J_Y^+ = K\frac{t_{i,j+1,k} - t_{i,j,k}}{h_Y}; \qquad J_Y^- = K\frac{t_{i,j,k} - t_{i,j-1,k}}{h_Y}; \qquad (5)$$

$$J_Z^+ = K\frac{t_{i,j,k+1} - t_{i,j,k}}{h_Z}; \qquad J_Z^- = K\frac{t_{i,j,k} - t_{i,j,k-1}}{h_Z},$$

где K – коэффициент пропорциональности – коэффициент теплопроводности.

Для удобства вычислений преобразуем уравнения (4) и (5), введя в них безразмерные множители. Для этого левую и правую части умножаем на шаг по времени τ и делим на удельную теплоемкость С. Для величин плотностей потоков введем новое обозначение:

$$I_X^+ = \frac{\tau}{Ch_X} J_X^+; \quad I_X^- = \frac{\tau}{Ch_X} J_X^-;$$

$$I_Y^+ = \frac{\tau}{Ch_Y} J_Y^+; \quad I_Y^- = \frac{\tau}{Ch_Y} J_Y^-; \tag{6}$$

$$I_Z^+ = \frac{\tau}{Ch_Z} J_Z^+; \quad I_Z^- = \frac{\tau}{Ch_Z} J_Z^-.$$

Обозначим удельное тепловыделение через:

$$Q = \frac{\tau}{C} q. \tag{7}$$

В новых обозначения уравнение (4) записывается в виде:

$$I_X^+ - I_X^- + I_Y^+ - I_Y^- + I_Z^+ - I_Z^- + Q = t^{s+1} - t^s. \tag{8}$$

Для новых плотностей потоков вместо (5) получаем выражения:

$$I_X^+ = A_X\left(t_{i+1,j,k} - t_{i,j,k}\right), \quad I_X^- = A_X\left(t_{i,j,k} - t_{i-1,j,k}\right),$$

$$I_Y^+ = A_Y\left(t_{i,j+1,k} - t_{i,j,k}\right), \quad I_Y^- = A_Y\left(t_{i,j,k} - t_{i,j-1,k}\right), \tag{9}$$

$$I_Z^+ = A_Z\left(t_{i,j,k+1} - t_{i,j,k}\right), \quad I_Y^- = A_Y\left(t_{i,j,k} - t_{i,j,k-1}\right),$$

где

$$A_X = \frac{K\tau}{h_X^2 C}, \quad A_Y = \frac{K\tau}{h_Y^2 C}, \quad A_Z = \frac{K\tau}{h_Z^2 C}. \tag{10}$$

Размерность коэффициента теплопроводности равна 1 Дж / (1 м *К*с), а удельной теплоемкости 1 Дж / (1 $м^3$ *К), коэффициенты А являются безразмерными величинами

За время $\Delta\tau$ изменение температуры элемента будет:

$$\Delta t = \Delta t_X^+ + \Delta t_X^- + \Delta t_Y^+ + \Delta t_Y^- + \Delta t_Z^+ + \Delta t_Z^- + \Delta Q \tag{11}$$

Уравнение (11) легко решается от начального момента времени до интересующего времени через равные кванты времени $\Delta\tau$. Обычно за начальный момент времени берется момент включения питания, в этот момент времени $\tau = 0$ температура в элементах равна температуре окружающей среды t_C. Обходя все узлы по порядку, можно определить температуру в них в любой момент времени.

Список использованных источников

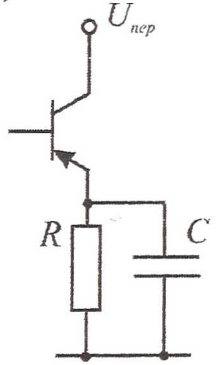
1. Маквецов Е.Н. Модели из кубиков. – М.: Советское радио, 1978.
2. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
3. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. – М.: Высшая школа, 2001.

УДК 621.382

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОЙ СТАБИЛЬНОСТИ ПОРОГОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РАДИОЧАСТОТНОГО ЭЛЕМЕНТА

Дмитриев В.Д., Лебедева Е.Г., Пак В.Т.

Питание дрейфовых транзисторов (с отключённой базой или нагруженной на резистор с номиналом более 10 кОм) от источника высокочастотного напряжения позволяет создать радиочастотные динамические элементы (рисунок 1,а) с *S*-образной вольтамперной характеристикой (рисунок 1,б) /1/.



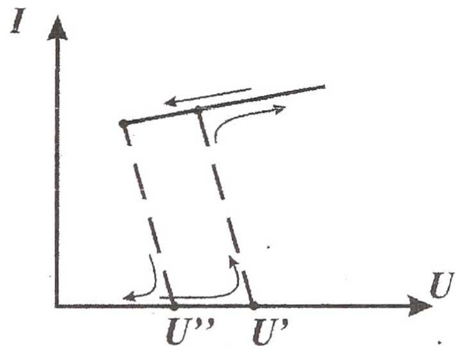


Рисунок 1. а) – Схема динамического элемента
б) – Вольтамперная характеристика

Данная работа посвящена экспериментальному исследованию стабильности пороговых характеристик включения ($U_{вкл}$) и выключения ($U_{выкл}$) динамического элемента в широком диапазоне температур – от минус 173°С до плюс 180°С. Пороговые характеристики включения и выключения динамического элемента зависят как от пассивной, так и от активной части схемы. Так как пассивные элементы (R,C) высокостабильны, то основное влияние на стабильность характеристик оказывают параметры транзистора.