УДК 534.131:533.312

Л. И. Фридман

ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ ОТКАЗЕ ОТ ГИПОТЕЗЫ КИРХГОФА

1. РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ

Пластина переменной толщины заменяется p кольцевыми пластинами постоянной толщины (см. рисунок).

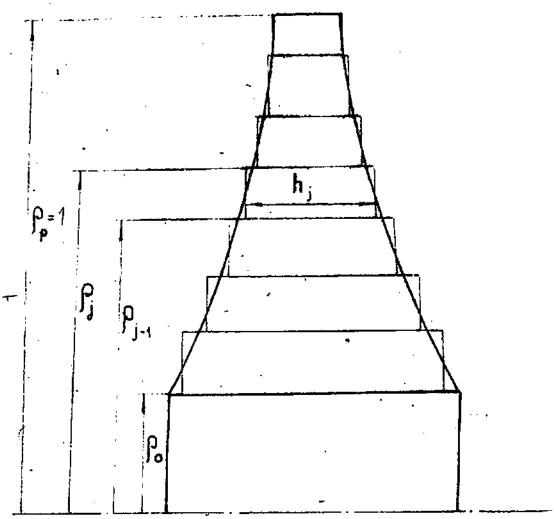

Рис. Схематизация пластины переменной толщины

Уравнения движения j-й пластины в безразмерных координатах ρ, Θ с учетом инерции вращения имеет вид [4]:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\rho}Q_\rho^{(j)}+\frac{\partial Q_\rho^{(j)}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial Q_\Theta^{(j)}}{\partial\Theta}=-\frac{Eh_j}{1-\nu}\frac{\partial^2 u^{(j)}}{\partial t^2}-q^{(j)}R\\&Q_\rho^{(j)}-\frac{1}{R}\left(\frac{\partial M_\rho^{(j)}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}M_\rho^{(j)}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial M_{\rho\Theta}^{(j)}}{\partial\Theta}-M_\Theta^{(j)}\right)=-\\&-\frac{D_j}{R^2}\frac{\partial^2\vartheta_\rho^{(j)}}{\partial t^2};\end{aligned}\right\}\quad(1.1)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
& Q_{\Theta}^{(j)} - \frac{1}{R}\left(\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial M_{\Theta}^{(j)}}{\partial \Theta} + \frac{\partial M_{\rho\Theta}^{(j)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} M_{\rho\Theta}^{(j)}\right) = - \\
& - \frac{D_j}{R^2}\,\frac{\partial^2 \vartheta_{\Theta}^{(j)}}{\partial t^2} .
\end{aligned}
\right\} \quad (1.1)
$$

Здесь $M_{\rho}^{(j)}$, $M_{\Theta}^{(j)}$, $M_{\rho\Theta}^{(j)}$, $Q_{\rho}^{(j)}$, $Q_{\Theta}^{(j)}$ — погонные изгибающие и крутящие моменты, перерезывающие силы на линиях $\rho = \mathrm{const}$ и $\Theta = \mathrm{const}$; $u^{(j)}$ — безразмерное перемещение, нормальное к срединной плоскости;

$\vartheta_{\rho}^{(j)}$, $\vartheta_{\Theta}^{(j)}$ — компоненты осредненного поворота;

t — безразмерное время, отнесенное к $R\cdot\sqrt{1-\nu^2}/c$;

R — внешний радиус пластины; $c = \sqrt{E\gamma/g}$;

E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона;

g — ускорение земного притяжения, γ — удельный вес материала пластины, h_j — толщина пластины, D_j — цилиндрическая жесткость.

Экспериментально показано, что собственные формы пластины переменной толщины характеризуются числом узловых окружностей и узловых диаметров. Поэтому для j-й пластины перемещения и осредненные повороты можно представить в виде:

$$
\left.
\begin{aligned}
& u_m^{(j)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{mn}^{(j)} \cdot \cos n\Theta; \\
& \vartheta_{\rho m}^{(j)} = \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_{\rho mn}^{(j)} \cdot \cos n\Theta; \\
& \vartheta_{\Theta m}^{(j)} = \sum_{n=\theta}^{\infty} \vartheta_{\Theta mn}^{(j)} \cdot \sin n\Theta.
\end{aligned}
\right\} \quad (1.2)
$$

Здесь $(j = 1,\ 2 \ldots\ p)$

m — число узловых окружностей,

n — число узловых диаметров,

$u_{mn}^{(j)}$, $\vartheta_{\rho mn}^{(j)}$, $\vartheta_{\Theta mn}^{(j)}$ — функции радиуса ρ, определяемые зависимостями [4]:

при $\lambda_{mn}^2 < b_j$ $\left(b_j = 6\eta\,(1-\nu)\,\frac{1}{\varkappa_j}\right.$; $\varkappa_j = \frac{h_j}{R}$;

$\eta = \frac{5}{6}$ — коэффициент распределения касательных напряжений.

$$
\left.\begin{aligned}
u^{(j)}_{mn} &= \left(\alpha^2_{j1mn} - b_j + \lambda^2_{mn}\right) F^{(j)}_{1mn} + \left(-\alpha^2_{j2mn} - b_j + \lambda^2_{mn}\right) F^{(j)}_{mn};\\
\vartheta^{(j)}_{\rho\, mn} &= -b_j\left(\frac{dF^{(j)}_{1mn}}{d\rho} + \frac{dF^{(j)}_{2mn}}{d\rho}\right) + \frac{n}{\rho}\,\psi^{(j)}_{mn};\\
\vartheta^{(j)}_{\theta\, mn} &= b_j\frac{n}{\rho}\left(F^{(j)}_{1mn} + F^{(j)}_{2mn}\right) - \frac{d\psi^{(j)}_{mn}}{d\rho}.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.3)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
F^{(j)}_{1mn} &= A^{(j)}_{1mn} I_n(\rho\alpha_{j\,1mn}) + B^{(j)}_{1mn} K_n(\rho\alpha_{j\,1mn});\\
F^{(j)}_{2mn} &= A^{(j)}_{2mn} J_n(\rho\,\alpha_{j\,2mn}) + B^{(j)}_{2mn} Y_n(\rho\,\alpha_{j\,2mn});\\
\psi^{(j)}_{mn} &= A^{(j)}_{3mn} I_n(\rho\,\beta_{j\,mn}) + B^{(j)}_{3mn} K_n(\rho\,\beta_{j\,mn}).
\end{aligned}\right\} \qquad (1.4)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\alpha_{j\,1mn} &= \sqrt{-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{\eta(1-\nu)}\right)\lambda^2_{mn} + \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{\eta(1-\nu)}\right)^2 \lambda^4_{mn} + \frac{12}{\varkappa_j^2}\lambda^2_{mn}}}\\
\alpha_{j\,2mn} &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{\eta(1-\nu)}\right)\lambda^2_{mn} + \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{\eta(1-\nu)}\right)^2 \lambda^4_{mn} + \frac{12}{\varkappa_j^2}\lambda^2_{mn}}}\\
\beta_{j\,mn} &= \sqrt{\frac{2}{1-\nu_j}(b_j - \lambda^2_{mn})}\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.5)
$$

Здесь λ_{mn} — безразмерная частота;

J_n, Y_n — функции Бесселя n-го порядка соответственно первого и второго рода;

I_n, K_n — модифицированные функции Бесселя;

n-го порядка, соответственно, первого и второго рода;

$A^{(j)}_{1mn}$, $B^{(j)}_{1mn}$, ... $B^{(j)}_{3mn}$ — произвольные постоянные.

При $\lambda^2_{mn} > b_j$ в первой и третьей формулах (1.5) появляется множителем мнимая единица i, поэтому в первой и третьей формулах (1.4) модифицированные функции Бесселя I_n, K_n переходят соответственно в функции Бесселя J_n и Y_n Таким образом, если пластина переменной толщины разделена на p пластин постоянной толщины, то решение однородной задачи содержит $6 \cdot p$ произвольных постоянных. Для j-й пластины можно записать граничные условия:

$$\left.\begin{aligned} \rho = \rho_{j-1} \qquad & u_{mn}^{(j-1)} = u_{mn}^{(j)}; \quad & M_{\rho\, mn}^{(j-1)} = M_{\rho\, mn}^{(j)}; \\ & \vartheta_{\rho\, mn}^{(j-1)} = \vartheta_{\rho\, mn}^{(j)}; \quad & M_{\rho\Theta\, mn}^{(j-1)} = M_{\rho\Theta\, mn}^{(j)}; \\ & \vartheta_{\Theta\, mn}^{(j-1)} = \vartheta_{\Theta\, mn}^{(j)}; \quad & Q_{\rho\, mn}^{(j-1)} = Q_{\rho\, mn}^{(j)}. \end{aligned}\right\} \qquad (1.6)$$

$$\left.\begin{aligned} \rho = \rho_{j} \qquad & u_{mn}^{(j)} = u_{mn}^{(j+1)}; \quad & M_{\rho\, mn}^{(j)} = M_{\rho\, mn}^{(j+1)}; \\ & \vartheta_{\rho\, mn}^{(j)} = \vartheta_{\rho\, mn}^{(j+1)}; \quad & M_{\rho\Theta\, mn}^{(j)} = M_{\rho\Theta\, mn}^{(j+1)}; \\ & \vartheta_{\Theta\, mn}^{(j)} = \vartheta_{\Theta\, mn}^{(j+1)}; \quad & Q_{\rho\, mn}^{(j)} = Q_{\rho\, mn}^{(j+1)}; \end{aligned}\right\} \qquad (1.7)$$

Граничные условия для внешнего ($\rho = 1$) и внутреннего ($\rho = \rho_0$) краев определяются способом закрепления пластины.

Обычно рассматриваются три способа закрепления: заделка, шарнирное опирание и свободный край. Этим способам закрепления соответствуют граничные условия:

$$u_{mn}^{(j)} = 0; \quad \vartheta_{\rho\, mn}^{(j)} = 0; \quad \vartheta_{\Theta\, mn}^{(j)} = 0. \qquad (1.8)$$

$$u_{mn}^{( )} = 0; \quad \vartheta_{\Theta\, mn}^{(j)} = 0; \quad M_{\rho mn}^{(j)} = 0. \qquad (1.9)$$

$$M_{\rho\, mn}^{(j)} = 0; \quad M_{\rho\Theta\, mn}^{(j)} = 0; \quad Q_{\rho\, mn}^{(j)} = 0. \qquad (1.10)$$

Моменты $M_{\rho\, mn}^{(j)}$, $M_{\Theta\, mn}^{(j)}$, $M_{\rho\Theta mn}^{(j)}$ и перерезывающие силы $Q_{\rho\, mn}^{(j)}$, $Q_{\Theta\, mn}^{(j)}$ подсчитываются по формулам [4]:

$$M_{\rho\, mn}^{(j)} = \frac{D_j}{R}\left[\frac{d\,\vartheta_{\rho\, mn}^{(j)}}{d\,\rho} + \nu\left(\frac{n}{\rho}\,\vartheta_{\Theta\, mn}^{(j)} + \frac{1}{\rho}\,\vartheta_{\rho\, mn}^{(j)}\right)\right];$$

$$M_{\Theta\, mn}^{(j)} = \frac{D_j}{R}\left(\frac{n}{\rho}\,\vartheta_{\Theta\, mn}^{(j)} + \frac{1}{\rho}\,\vartheta_{\rho\, mn}^{(j)} + \nu\,\frac{d\,\vartheta_{\rho mn}^{(j)}}{d\,\rho}\right);$$

$$M_{\rho\Theta\, mn}^{(j)} = \frac{D_j}{R}\cdot\frac{1-\nu}{2}\left(-\frac{n}{\rho}\,\vartheta_{\rho\, mn}^{(j)} + \frac{d\,\vartheta_{\Theta\, mn}^{(j)}}{d\rho} - \frac{1}{\rho}\,\vartheta_{\Theta\, mn}^{(j)}\right);$$

$$Q_{\rho mn}^{(j)} = \frac{\eta E h_j}{2(1+\nu)}\left(\vartheta_{mn}^{(j)} - \frac{du_{\rho\, mn}^{(j)}}{d\,\rho}\right);$$

$$Q_{\Theta\, mn}^{(j)} = \frac{\eta E h_j}{2(1+\nu)}\left(\vartheta_{\Theta\, mn}^{(j)} + \frac{n}{\rho}\,u_{mn}^{(j)}\right).$$

Для $6p$ произвольных постоянных условия (1.6), (1.7) и два из трех условий (1.8), (1.9) и (1.10) дают систему из $6p$

однородных уравнений. Условие разрешимости полученной системы дает частотное уравнение.

Таким образом, задача о нахождении собственных частот и форм круглой пластины переменной толщины решена.

2. РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ

Решение задачи о вынужденных движениях пластины под действием нагрузки q (ρ, Θ, t) будем искать в виде ряда по собственным формам. Для этого необходимо получить условие ортогональности собственных форм ступенчатой пластины. С этой целью запишем систему уравнений собственных форм, которое может быть получено из системы (1.1) после разделения переменных по координатам ρ, Θ и времени t:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{1-\nu^2}{Eh_j}\left(\frac{1}{\rho}Q_{\rho m}^{(j)}+\frac{\partial Q_{\rho m}^{(j)}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial Q_{\Theta m}^{(j)}}{\partial\Theta}\right)=\lambda^2{}_m u_m^{(j)}\ ;\\
&\frac{R^2}{D_j}\left[Q_{\rho m}^{(j)}-\frac{1}{R}\left(\frac{\partial M_{\rho m}^{(j)}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}M_{\rho m}^{(j)}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial M_{\rho\Theta m}^{(j)}}{\partial\Theta}-\right.\right.\\
&\left.\left.-M_{\Theta m}^{(j)}\right)\right]=\lambda_m{}^2\vartheta_{\rho m}^{(j)}\ ;\\
&\frac{R^2}{D_j}\left[Q_{\Theta m}^{(j)}-\frac{1}{R}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial M_{\Theta m}^{(j)}}{\partial\Theta}+\frac{\partial M_{\rho\Theta m}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}M_{\rho\Theta m}^{(j)}\right)\right]=\\
&\lambda_m{}^2\vartheta_{\Theta m}^{(j)}\ .
\end{aligned}
\right\}
\tag{2.1}
$$

Умножим уравнения системы (2.1) соответственно на $u_k^{(j)}\rho\cdot d\rho\cdot d\Theta$, $\frac{\varkappa^2_j}{12}\vartheta_{\rho k}^{(j)}\cdot\rho\cdot d\rho\cdot d\Theta$, $\frac{\varkappa_j^2}{12}\vartheta_{\Theta k}\,\rho\,d\rho\,d\Theta$,

сложим их и проинтегрируем по срединной плоскости j-й пластины. После подстановки выражений (1.2) в полученные зависимости, интегрирования по Θ и вычитания из них аналогичных выражений для k-й формы, получим:

$$
(\lambda^2{}_{mn}-\lambda^2{}_{kn})\int\limits_{\rho_{j-1}}^{\rho_j}\left[u_{mn}^{(j)}u_{kn}^{(j)}+\frac{\varkappa_j^2}{12}\left(\vartheta_{\rho mn}^{(j)}\vartheta_{\rho kn}^{(j)}+\vartheta_{\Theta mn}^{(j)}\vartheta_{\Theta kn}^{(j)}\right)\right]\rho\,d\rho=
$$

$$
=\frac{1-\nu^2}{Eh_j}\left[Q_{\rho mn}^{(j)}u_{kn}^{(j)}-Q_{\rho kn}^{(j)}u_{mn}^{(j)}-\frac{1}{R}\left(M_{\rho mn}^{(j)}\vartheta_{\rho kn}^{(j)}-\right.\right.
$$

$$
\left.\left.-M_{\rho kn}^{(j)}\vartheta_{\rho mn}^{(j)}+M_{\rho\Theta mn}^{(j)}\vartheta_{\Theta kn}^{(j)}-M_{\rho\Theta kn}^{(j)}\cdot\vartheta_{\Theta mn}^{(j)}\right)\right]\rho\,\Bigg|_{\rho_{j-1}}^{\rho_j}.
$$

Умножая полученное выражение на h_j и суммируя по всем пластинам от $j = 1$ до $j = p$ с учетом условий (1.6) и (1.7), получим:

$$\left.\begin{aligned}&(\lambda_{mn}^2 - \lambda_{kn}^2) \sum_{j=1}^{p} h_j \int_{\rho_{j-1}}^{\rho_j} \Big[u_{mn}^{(j)} u_{kn}^{(j)} + \frac{\varkappa_j^2}{12}\Big(\vartheta_{\rho mn}^{(j)} \vartheta_{\rho kn}^{(j)} + \\ &\vartheta_{\Theta mn}^{(j)} \vartheta_{\Theta kn}^{(j)}\Big)\Big] \rho\, d\rho = \\ &= \frac{1-\nu^2}{E}\Big[Q_{\rho mn} u_{kn} - Q_{\rho kn} u_{mn} - \frac{1}{R}\Big(M_{\rho mn} \vartheta_{\rho kn} - \\ &- M_{\rho kn} \vartheta_{\rho mn} + M_{\rho\Theta mn} \vartheta_{\Theta kn} - M_{\rho\Theta kn} \vartheta_{\Theta mn}\Big)\Big] \rho \Big|_{\rho_0}^{1}.\end{aligned}\right\} \quad (2.2)$$

В правой части (2.2) опущены верхние индексы, так как соответствующие величины, как видно из проставленных пределов, берутся для $\rho = 1$ и $\rho = \rho_0$, т. е. для первой и последней пластины. Правая часть (2.2) в силу условий (1.8), (1.9), (1.10), равна нулю, откуда следует условие ортогональности ступенчатой пластины:

$$\sum_{j=1}^{p} h_j \int_{\rho_{j-1}}^{\rho_j} \Big[u_{mn}^{(j)} u_{kn}^{(j)} + \frac{\varkappa_j^2}{12}\left(\vartheta_{\rho mn}^{(j)} \vartheta_{\rho kn}^{(j)} + \vartheta_{\Theta mn}^{(j)} \vartheta_{\Theta kn}^{(j)}\right)\Big] \rho\, d\rho = 0 \quad (2.3)$$

при $m \neq k$.

Решение неоднородной задачи ищем в виде:

$$\left.\begin{aligned}u^{(j)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{mn} u_{mn}^{(j)} \cos n\Theta, \\ \vartheta_\rho^{(j)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{mn} \vartheta_{\rho mn}^{(j)} \cos n\Theta, \\ \vartheta_\Theta^{(j)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{mn} \vartheta_{\Theta mn}^{(j)} \sin n\Theta, \\ M_\rho^{(j)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{mn} M_{\rho mn}^{(j)} \cos n\Theta, \\ M_\Theta^{(j)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{mn} M_{\Theta mn}^{(j)} \cos n\Theta; \\ M_{\rho\Theta}^{(j)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{mn} M_{\rho\Theta mn}^{(j)} \sin n\Theta,\end{aligned}\right\} \quad (2.4)$$

$$
\left.\begin{aligned}
Q_{\rho}^{(j)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{mn}\, Q_{\rho mn}^{(j)} \cos n\Theta ; \\
Q_{\Theta}^{(j)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{mn}\, Q_{\Theta mn}^{(j)} \sin n\Theta ,
\end{aligned}\right\} \qquad (2.4)
$$

Здесь φ_{mn} — функция времени t.

Подставляя выражения (2.4) в (1.1) с учетом равенств (2.1) и (1.2), получаем:

$$
\left.\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{d^2 \varphi_{mn}}{d t^2} + \lambda^2_{mn} \varphi_{mn} \right) u_{mn}^{(j)} \cos n\Theta = \frac{1-\nu^2}{E h_j} q^{(j)} R \\
&\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d^2 \varphi_{mn}}{d t^2} + \lambda^2_{mn} \varphi_{mn} \right) \vartheta_{\rho mn}^{(j)} \cos n\Theta = 0; \\
&\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d^2 \varphi_{mn}}{d t^2} + \lambda^2_{mn} \varphi_{mn} \right) \vartheta_{\Theta mn}^{(j)} \sin n\Theta = 0;
\end{aligned}\right\} \qquad (2.5)
$$

Умножая, каждое из уравнений (2.5), соответственно на

$h_j u_{kn}^{(j)} \cos n\Theta \cdot \rho\, d\rho\, d\Theta$, $h_j \frac{\varkappa_j^2}{12} \vartheta_{\rho kn}^{(j)} \cos n\Theta\, \rho\, d\rho\, d\Theta$,

$h_j \frac{\varkappa_j^2}{12} \vartheta_{\Theta kn}^{(j)} \sin n\Theta\, \rho\, d\rho\, d\Theta$, складывая их, интегрируя по срединной плоскости j-й пластины и суммируя по всем пластинам с учетом (2.3), получим:

$$
\frac{d^2 \varphi_{mn}}{d t^2} + \lambda_{mn}^2 \varphi_{mn} = f_{mn}(t), \qquad (2.6)
$$

где

$$
f_{mn}(t) = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{R}{C_{mn}} \sum_{j=1}^{p} \int_{\rho_{j-1}}^{\rho_j} \int_0^{2\pi} q^{(j)} u_{mn}^{(j)} \cos n\Theta\, \rho\, d\rho\, d\Theta, \qquad (2.7)
$$

$$
C_{mn} = \pi \sum_{j=1}^{p} h_j \int_{\rho_{j-1}}^{\rho_j} \left\{ \left(u_{mn}^{(j)} \right)^2 + \frac{\varkappa_j^2}{12} \left[\left(\vartheta_{\rho mn}^{(j)} \right)^2 + \left(\vartheta_{\Theta mn}^{(j)} \right)^2 \right] \right\} \rho\, d\rho. \qquad (2.8)
$$

Интеграл в выражении (2.8) может быть вычислен по методу А. Н. Крылова [5]:

$$
C_{mn} = \pi \frac{1-\nu^2}{E} \frac{1}{2\lambda_{mn}} \left[\frac{\partial Q_{\rho mn}}{\partial \lambda_{mn}} u_{mn} - Q_{\rho mn} \frac{\partial u_{mn}}{\partial \lambda_{mn}} - \right.
$$

$$
- \frac{1}{R} \left(\frac{\partial M_{\rho mn}}{\partial \lambda_{mn}} \vartheta_{\rho mn} - M_{\rho mn} \frac{\partial \vartheta_{\rho \Theta mn}}{\partial \lambda_{mn}} + \frac{\partial M_{\rho\Theta mn}}{\partial \lambda_{mn}} \vartheta_{\Theta mn} - \right.
$$

$$- M_{\rho\Theta\, mn} \frac{\partial \vartheta_{\Theta\, mn}}{\partial \lambda_{mn}}\Big)\Big]\,\rho\,\Big|_{\rho_0}^{1} .$$

Решение уравнения (2.6) при нулевых начальных условиях записывается в виде:

$$\varphi_{mn}(t) = \frac{1}{\lambda_{mn}} \int_0^t f_{mn}(\tau) \sin \lambda_{mn} (t - \tau)\, d\tau .$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Если q является только функцией времени t, то

$$f_{mo}(t) = \frac{1-\nu^2}{E} q(t)\, R \frac{2\pi}{C_{mo}} \sum_{j=1}^{p} \int_{\rho_{j-1}}^{\rho_j} u_{mo}^{(t)} \rho\, d\rho.$$

При приложении к j-й пластине равномерно распределенной по окружности радиуса $\rho = \rho_*$ силы $P(t)$, последняя заменяется распределенной по кольцу $\rho_1^* \leqslant \rho \leqslant \rho_*$ нагрузкой $q = P(t)/R\,(\rho_* - \rho_1^*)$. В этом случае суммирование в (2.7) по j производить не следует, и интегрирование по ρ производится в пределах от ρ_1^* до ρ_* :

$$f_{mo}(t) = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{2\pi}{C_{mo}} P(t) \frac{1}{\rho_* - \rho_1^*} \int_{\rho_1^*}^{\rho_*} u_{mo}\, \rho\, d\rho .$$

Переходя к пределу $\rho_1^* \to \rho^*$ и. раскрывая неопределенность, получим:

$$f_{mo} = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{2\pi}{C_{mo}} P(t)\, u_{mo}(\rho_*)\, \rho_* .$$

Аналогично при действии распределенного по радиусу $\rho = \rho_*$ момента $M(t)$

$$f_{mo}(t) = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{2\pi}{C_{mo}} \frac{M(t)}{R} \frac{du_{mo}}{d\rho} (\rho_*)\, \rho_* .$$

При действии в точке $\rho = \rho_*$, $\Theta = \Theta_*$ сосредоточенной силы $P_*(t)$

$$f_{mn}(t) = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{1}{C_{mn}} \frac{P_*(t)}{R} u_{mn}(\rho_*) \cos n\Theta_* .$$

Если к пластине в точке $\rho = \rho_*$, $\Theta = \Theta_*$ приложен сосредоточенный момент $M_*(t)$, вектор которого направлен по касательной к линии $\rho = \text{const}$, то

$$f_{mn}(t) = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{1}{C_{mn}} \frac{M_*(t)}{R^2} \frac{du_{mn}}{d\rho} (\rho_*) \cdot \cos n\Theta_* .$$

Если же вектор сосредоточенного момента $M_{**}(t)$ направлен по радиусу пластины, то

$$f_{mn}(t) = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{1}{C_{mn}} \frac{M_{**}(t)}{R^2} \frac{n}{\rho_*} u_{mn}(\rho_*) \cdot \sin n\,\Theta_* \,.$$

В заключение заметим, что предложенный метод расчета легко может быть реализован на ЭВМ при сравнительно небольших объеме памяти и затратах времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Москаленко В. Н.* К применению уточненных теорий изгиба пластин в задаче о собственных колебаниях. «Инженерный журнал», М., 1961, том 1, вып. 3.
2. *Уфлянд Я. С.* Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин. «Прикладная математика и механика», М., 1948, т. 12, вып. 3.
3. *Дубинкин М. В.* Колебания плит с учетом инерции вращения и сдвига. «Известия АН СССР», ОТН, М., 1958, № 2.
4. *Фридман Л. И.* Поперечные колебания круглых пластин с учетом инерции вращения и деформаций сдвига. В сб. «Проектирование и доводка авиационных газотурбинных двигателей», Труды КуАИ, вып. 67, Куйбышев, 1974.
5. *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, М—Л, ГИТТЛ, 1950.

УДК 621.438—254:539.4.001.24

В. И. Цейтлин, Л. Н. Козлов, О. В. Колотникова

ОПТИМИЗАЦИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОЛЕСА ТУРБИНЫ ГТД ПО ВЕСУ

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

ω — угловая скорость вращения, сек$^{-1}$;
z — число лопаток;
$h_{п}$ — толщина верхней полки, мм;
γ — удельный вес материала, кгс/м^3;
ρ — плотность материала, кгс·сек^2/м^4;
F_a, $F_{ср}$, F_0 — площадь верхнего, среднего и корневого сечений пера соответственно, мм^2;
R_a, $R_{ср}$, R_0 — радиус расположе-