КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С. П. КОРОЛЕВА
Труды, выпуск 48, 1971 г.
Вопросы прочности элементов авиационной конструкции

М. В. Зацепина, Х. С. Хазанов

ВАРИАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С КРУГЛЫМ ВЫРЕЗОМ ПРИ БОЛЬШИХ ПРОГИБАХ

Обозначения:

r, Θ — полярные на развертке цилиндра координаты;
R, h — радиус срединной поверхности и толщина оболочки;
R_0 — радиус выреза;
u, v, w — компоненты перемещения точки срединной поверхности;
ε_r, ε_θ, $\gamma_{r\theta}$ — компоненты деформации в срединной поверхности;
$\varkappa_r$, $\varkappa_\theta$, τ — изменение кривизн и кручение срединной поверхности;
N_r, N_θ, $T_{r\theta}$ — нормальные и сдвигающее усилия;
M_r, M_θ, $H_{r\theta}$ — изгибающие и крутящий моменты;
Q_r^* — обобщенная перерезывающая сила в смысле Кирхгофа;
E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки;
q — внешнее нормальное давление.

Примечание. Положительное направление сил, моментов и перемещений соответствует рис. 1 на стр. 4 настоящего сборника.

В статье получены вариационные уравнения Лагранжа и Кастильяно применительно к круговой цилиндрической оболочке с круглым вырезом на боковой поверхности. Задача рассматривается в геометрически нелинейной постановке в полярных на развертке цилиндра координатах.

Основные соотношения

Запишем на основании [1, 2] выражения для компонентов деформации через перемещения, воспользовавшись геометрическими соотношениями нелинейной теории пологой цилиндрической оболочки

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{R}\sin^2\Theta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \Theta} + \frac{u}{r} + \frac{w}{R}\cos^2\Theta + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \Theta}\right)^2 \qquad (1)$$

$$\gamma_{r\Theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{w}{R}\sin 2\Theta + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial \Theta}, \tag{1}$$

$$\varkappa_r = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad \varkappa_\Theta = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \Theta^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}$$

$$\tau = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\, \partial \Theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \Theta}. \tag{2}$$

Зависимость между усилиями и деформациями примем в виде

$$N_r = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\Theta), \quad N_\Theta = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_\Theta + \mu\varepsilon_r)$$

$$M_r = D(\varkappa_r + \mu\varkappa_\Theta), \quad M_\Theta = D(\varkappa_\Theta + \mu\varkappa_r)$$

$$T_{r\Theta} = \frac{Eh}{2(1+\mu)}\gamma_{r\Theta}, \quad H_{r\Theta} = D(1-\mu)\tau. \tag{3}$$

Свяжем силы в срединной поверхности оболочки с функцией напряжений φ соотношениями

$$N_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \Theta^2}, \quad N_\Theta = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}, \quad T_{r\Theta} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right), \tag{4}$$

при которых тождественно удовлетворяются два уравнения равновесия пологой оболочки

$$\frac{\partial}{\partial r}(rN_r) + \frac{\partial T_{r\Theta}}{\partial \Theta} - N_\Theta = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rT_{r\Theta}) + \frac{\partial N_\Theta}{\partial \Theta} + T_{r\Theta} = 0. \tag{5}$$

Напряженное состояние оболочки с вырезом условно разбивается на основное и дополнительное. В основном состоянии усилия подсчитываются от заданной внешней нагрузки как для оболочки без отверстия. В дополнительном по контуру выреза прикладываются усилия, которые совместно с силами основного состояния обеспечивают удовлетворение граничных условий задачи. Если речь идет об оболочке с неподкрепленным вырезом, то по его контуру суммарные усилия должны быть равны нулю. В случае же подкрепления выреза упругим или жестким включением суммарные усилия должны обеспечить совместность перемещений по линии спая.

В дальнейшем усилия и перемещения дополнительного состояния будем отмечать черточкой сверху, величины основного состояния — индексом «о», а суммарные усилия и перемещения оставим без дополнительных индексов сверху, так что

$$N_r = N_r^0 + \overline{N}_r, \quad u = u^0 + \overline{u} \text{ и т. д.}$$

Вариационное уравнение Лагранжа

Будем исследовать напряженное и деформированное состояние оболочки в окрестности выреза. Пусть $\delta\overline{u}(r, \Theta)$, $\delta\overline{v}(r, \Theta)$,

$\delta \bar{w}(r, \Theta)$ — вариации перемещений дополнительного состояния, удовлетворяющие условиям периодичности относительно окружной координаты. Учитывая локальность возмущений, обусловленных вырезом, будем считать, что на некотором расстоянии от его края вариации перемещений стремятся к нулю.

Запишем вариационное уравнение Лагранжа применительно к рассматриваемой задаче, имея в виду, что основное состояние является заданным (определенным).

$$\int_{R_0}^{r_1}\int_0^{2\pi} r\delta W\,dr\,d\Theta + \int_{R_0}^{r_1}\int_0^{2\pi} qr\delta\bar{w}\,dr\,d\Theta -$$

$$-R_0\int_0^{2\pi}\left[\check{N}_r\,\delta\bar{u}+\check{T}_{r\Theta}\,\delta\bar{v}+\left(\check{Q}_r^* + \check{N}_r\frac{\partial w}{\partial r} + \check{T}_{r\Theta}\frac{1}{R_0}\frac{\partial w}{\partial\Theta}\right)\delta\bar{w}+\check{M}_r\,\delta\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial r}\right)\right]d\Theta, \tag{6}$$

где r_1 — значение координаты r, при которой полностью затухают возмущения, вносимые вырезом в напряженное и деформированное состояние оболочки. Галочкой сверху обозначены усилия, действующие на оболочку со стороны включения по краю выреза. В случае неподкрепленного выреза последний интеграл в (6) равен нулю.

Вариация удельной энергии деформации, отнесенная к единице площади срединной поверхности, имеет вид [1].

$$\delta W = N_r\,\delta\varepsilon_r + N_\Theta\,\delta\varepsilon_\Theta + T_{r\Theta}\,\delta\gamma_{r\Theta} + M_r\,\delta\varkappa_r + M_\Theta\,\delta\varkappa_\Theta + 2H_{r\Theta}\,\delta\tau. \tag{7}$$

Поскольку $\delta u^0 = \delta v^0 = \delta w^0 = 0$, то, с учетом (1) и (2), величины, входящие в (7), равны

$$\delta\varepsilon_r = \delta\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial r}\right) + \frac{1}{R}\,\delta\bar{w}\sin^2\Theta + \frac{\partial w}{\partial r}\,\delta\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial r}\right),$$

$$\delta\varepsilon_\Theta = \frac{1}{r}\,\delta\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial\Theta}\right) + \frac{1}{r}\,\delta\bar{u} + \frac{1}{R}\,\delta\bar{w}\cdot\cos^2\Theta + \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\Theta}\,\delta\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\Theta}\right),$$

$$\delta\gamma_{r\Theta} = \frac{1}{r}\,\delta\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\Theta}\right) + \delta\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial r}\right) - \frac{1}{r}\,\delta\bar{v} + \frac{1}{R}\,\delta\bar{w}\sin 2\Theta +$$

$$+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\,\delta\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\Theta}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\Theta}\,\delta\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial r}\right),$$

$$\delta\varkappa_r = -\,\delta\left(\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial r^2}\right),$$

$$\delta\varkappa_\Theta = -\frac{1}{r^2}\,\delta\left(\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\Theta^2}\right) - \frac{1}{r}\,\delta\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial r}\right),$$

$$\delta\tau = -\frac{1}{r}\,\delta\left(\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial r\,\partial\Theta}\right) + \frac{1}{r^2}\,\delta\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\Theta}\right). \tag{8}$$

Введем обозначение

$$I = \int_{R_0}^{r_1}\int_0^{2\pi} r\delta W\,dr\,d\Theta. \tag{9}$$

Подставим (7) и (8) в (9) и преобразуем некоторые интегралы. Интегрированием по частям найдем, например,

$$\int\limits_{R_0}^{r_1}\int\limits_0^{2\pi} rN_r\delta\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial r}\right)dr\,d\Theta=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left[rN_r\,\delta\bar{u}\right]_{r=R_0}d\Theta-\int\limits_{R_0}^{r_1}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}(rN_r)\,\delta\bar{u}\,dr\,d\Theta, \qquad (10)$$

$$\int\limits_{R_0}^{r_1}\int\limits_0^{2\pi} N_\Theta\,\delta\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial\Theta}\right)dr\,d\Theta=-\int\limits_{R_0}^{r_1}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial N_\Theta}{\partial\Theta}\,\delta\bar{v}\,dr\,d\Theta. \qquad (11)$$

В (10) учтено, что $\delta\bar{u}=0$ при $r=r_1$. При вычислении интеграла (11) на усилия наложено, как и на вариации перемещений, условие периодичности.

Аналогично (10) и (11) можно преобразовать в (9) все подобные интегралы. Выразим теперь, в соответствии с (4), суммарные силы в срединной поверхности через функцию напряжений φ, а моменты, согласно (3) и (2), через суммарное перемещение w. После ряда упрощений получим

$$I=I_1+I_2, \qquad (11)$$

где

$$I_1=\int\limits_{R_0}^{r_1}\int\limits_0^{2\pi}\left[D\nabla^2\nabla^2 w-\frac{1}{R}\,l_1(\varphi)+l_2(\varphi,w)\right]r\delta\bar{w}\,dr\,d\Theta, \qquad (12)$$

$$I_2=R_0\int\limits_0^{2\pi}\left[N_r\,\delta\bar{u}+T_{r\Theta}\,\delta\bar{v}+\left(Q_r^*+N_r\frac{\partial w}{\partial r}+T_{r\Theta}\frac{\partial w}{R_0\,\partial\Theta}\right)\delta\bar{w}+\right.$$

$$\left.+M_r\,\delta\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial r}\right)\right]_{r=R_0}d\Theta. \qquad (13)$$

Через $l_1(\varphi)$ и $l_2(\varphi, w)$ в (12) обозначены дифференциальные операторы вида

$$l_1(\varphi)=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\Theta^2}\right)\sin^2\Theta+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\cos^2\Theta-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\Theta}\right)\sin 2\Theta, \qquad (14)$$

$$l_2(\varphi,w)=\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\Theta^2}-2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial\Theta}\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial\Theta}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\Theta^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\Theta}\frac{\partial w}{\partial\Theta}\right)\right). \qquad (15)$$

Подстановкой (12) и (13) вместо первого интеграла в (6) получим окончательный вид вариационного уравнения Лагранжа. Поскольку вариации $\delta\bar{u}$, $\delta\bar{v}$, $\delta\bar{w}$ являются произвольными и независимыми функциями, то из него вытекают уравнение равновесия

$$D\,\nabla^2\nabla^2 w-\frac{1}{R}\,l_1(\varphi)+l_2(\varphi,w)+q=0 \qquad (16)$$

и статические граничные условия по краю выреза, которые, ввиду их громоздкости, не будем выписывать.

Заметим, что при преобразовании интегралов типа (11) условия периодичности усилий можно, вообще говоря, и не использовать. Они могут быть получены как следствие из вариационного уравнения, но выкладки оказываются при этом более громоздкими.

Вариационное уравнение Кастильяно

Дадим функции напряжений дополнительного состояния произвольную вариацию $\delta\overline{\varphi}\ (r, \Theta)$, стремящуюся к нулю при $r=r_1$ и удовлетворяющую условиям периодичности относительно окружной координаты. Запишем теперь, следуя идеям работы [3], выражение для вариации потенциальной энергии деформации оболочки, имея в виду, что основное состояние является заданным

$$\delta U=\int_{R_0}^{r_1}\int_0^{2\pi}(\varepsilon_r\,\delta\overline{N}_r+\varepsilon_\Theta\,\delta\overline{N}_\Theta+\gamma_{r\Theta}\,\delta\overline{T}_{r\Theta})\,rdr\,d\Theta. \qquad (17)$$

Подставим в (17) компоненты деформации в соответствии с (1) и воспользуемся для преобразования полученного выражения, где это необходимо, интегрированием по частям*. С учетом (5) можно при этом получить

$$\delta U = R_0\int_0^{2\pi}[u\delta\overline{N}_r+v\delta\overline{T}_{r\Theta}]_{r=R_0}d\Theta+$$

$$+\int_{R_0}^{r_1}\int_0^{2\pi}\left\{\left[\frac{w}{R}\sin^2\Theta+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2\right]\delta\overline{N}_r+\left[\frac{w}{R}\cos^2\Theta+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\Theta}\right)^2\right]\delta\overline{N}_\Theta+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{w}{R}\sin 2\Theta+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial\Theta}\right]\delta\overline{T}_{r\Theta}\right\}rdr\,d\Theta. \qquad (18)$$

Вычитая (18) из (17), имеем

$$\int_{R_0}^{r_1}\int_0^{2\pi}(\hat{\varepsilon}_r\delta\overline{N}_r+\hat{\varepsilon}_\Theta\,\delta\overline{N}_\Theta+\hat{\gamma}_{r\Theta}\,\delta\overline{T}_{r\Theta})\,rdr\,d\Theta=R_0\int_0^{2\pi}[u\delta\overline{N}_r+v\delta\overline{T}_{r\Theta}]_{r=R_0}d\Theta.$$

где

$$\hat{\varepsilon}_r=\frac{1}{Eh}(N_r-\mu N_\Theta)-\frac{w}{R}\sin^2\Theta-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2$$

$$\hat{\varepsilon}_\Theta=\frac{1}{Eh}(N_\Theta-\mu N_r)-\frac{w}{R}\cos^2\Theta-\frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial w}{\theta\Theta}\right)^2 \qquad (20)$$

$$\hat{\gamma}_{r\Theta}=\frac{2(1+\mu)}{Eh}T_{r\Theta}-\frac{w}{R}\sin 2\Theta-\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial\Theta}.$$

---

* Здесь и в дальнейшем учитывается периодичность перемещений u и v. Если этого не использовать, то вывод будет более громоздким, но окончательный вид вариационного уравнения не изменится.

Величины $\hat{\varepsilon}_r$, $\hat{\varepsilon}_\Theta$ и $\hat{\gamma}_{r\Theta}$ могут быть также представлены через u и v по формулам, подобным геометрическим соотношениям плоской задачи теории упругости.

Выразив в (19) вариации усилий в соответствии с (4) через $\delta\bar{\varphi}$ и проинтегрировав по частям, получим

$$\int\limits_{R_0}^{r_1}\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2\hat{\varepsilon}_r}{\partial\Theta^2}-\frac{\partial\hat{\varepsilon}_r}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\hat{\varepsilon}_\Theta)-\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\Theta}(r\hat{\gamma}_{r\Theta})\right]\delta\bar{\varphi}\,dr\,d\Theta=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\hat{\varepsilon}_\Theta)\delta\bar{\varphi}-\hat{\varepsilon}_r\delta\bar{\varphi}+(u-r\hat{\varepsilon}_\Theta)\frac{\partial}{\partial r}\delta\bar{\varphi}+\left(\frac{v}{r}+\hat{\gamma}_{r\Theta}\right)\frac{\partial}{\partial\Theta}\delta\bar{\varphi}+\right.$$

$$\left.+\frac{u}{r}\frac{\partial^2}{\partial\Theta^2}\delta\bar{\varphi}-v\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\Theta}\delta\bar{\varphi}\right]_{r=P_0}d\Theta. \qquad (21)$$

Если в правой части этого равенства выразить $\hat{\varepsilon}_r$, $\hat{\varepsilon}_\Theta$ и $\hat{\gamma}_{r\Theta}$, как указывалось ранее, через u и v, то она может быть приведена к виду

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left[\frac{\partial v}{\partial r}\delta\bar{\varphi}-v\frac{\partial}{\partial r}\delta\bar{\varphi}+\frac{u}{r}\frac{\partial}{\partial\Theta}\delta\bar{\varphi}\right]_{r=R_0}d\Theta=0. \qquad (22)$$

Подстановка (20) с учетом (4) в левую часть (21) после преобразований дает

$$\int\limits_{R_0}^{r_1}\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{1}{Eh}\nabla^2\nabla^2\varphi+\frac{1}{R}l_1(w)-\frac{1}{2}l_2(w,w)\right]r\delta\bar{\varphi}\,d\,r\,d\Theta=0, \qquad (23)$$

где $l_1(w)$ и $l_2(w, w)$ определяются по (14) и (15) после замены в них φ на w.

Так как вариация $\delta\bar{\varphi}$ может быть произвольной, то из (23) следует уравнение совместности деформаций.

$$\frac{1}{Eh}\nabla^2\nabla^2\varphi+\frac{1}{R}l_1(w)-\frac{1}{2}l_2(w,w)=0. \qquad (24)$$

Итак, получена система из двух вариационных уравнений, которую можно использовать для приближенного решения задачи о больших прогибах в зоне круглого выреза на боковой поверхности цилиндрической оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Л. Гольденвейзер. Теория упругих тонких оболочек, М., 1953.
2. В. В. Новожилов. Теория тонких оболочек, 1962.
3. А. С. Вольмир. Гибкие пластинки и оболочки. М., 1956.