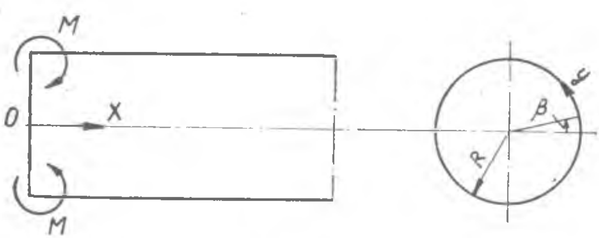
КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С. П. КОРОЛЕВА
*Труды, выпуск 48, 1971 г.*
Вопросы прочности элементов авиационных конструкций

**В. Ф. Ефремов**

# УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, НАГРУЖЕННОЙ КРАЕВЫМИ ИЗГИБАЮЩИМИ МОМЕНТАМИ

В статье исследуется устойчивость полубесконечной цилиндрической оболочки, нагруженной продольными изгибающими моментами, равномерно распределенными по краю (фиг. 1).




Фиг. 1.

Рассмотрены два вида граничных условий на краю оболочки: край шарнирно оперт; край свободен.

В качестве исходных уравнений задачи использованы уравнения устойчивости В. З. Власова [1]:

$$\nabla^2\nabla^2\varphi - \frac{Eh}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0;$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + D\,\nabla^2\nabla^2 w + N_y\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R^2}\right) = 0, \qquad (1)$$

где $\varphi$ — функция напряжений; $R$, $h$ — радиус и толщина оболочки; $E$ — модуль упругости; $N_y$ — нормальное сжимающее усилие в окружном направлении, возникающее в оболочке до потери устойчивости; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$; $\nu$ — коэффициент Пуассона.

Интегрирование уравнений (1) выполнено с помощью метода Бубнова-Галеркина. При этом аппроксимация выражений для прогиба $w$ и функции напряжений $\varphi$ производилась по методу, предложенному А. С. Авдониным [1].

1. Рассмотрим случай шарнирного опирания оболочки. Оболочка, нагруженная так, как показано на фиг. 1, может терять устойчивость от сжимающих усилий $N_y$. Последние определяются из расчета докритического состояния оболочки:

$$N_y = 2MRk^2e^{-kx}\sin kx.$$

Здесь

$$k^4 = \frac{3(1-\nu^2)}{R^2h^2}.$$

Предположим, что прогиб оболочки после потери устойчивости в направлении образующей может быть представлен в виде затухающей функции, удовлетворяющей заданным граничным условиям на краю $x=0$. Кроме того, можно ожидать, что в окружном направлении прогиб является периодической функцией угла $\beta$. Из аналогичных соображений можно исходить и при выборе функции напряжений.

На основании этих предпосылок полагаем:

$$w = e^{-kx}(A_1 + A_2\cos kx + A_3\sin kx)\cos n\beta, \quad (2)$$

$$\varphi = e^{-kx}(B_1 + B_2\cos kx + B_3\sin kx)\cos n\beta; \quad (3)$$

где $A_1$, $A_2$,..., $B_3$ — произвольные постоянные; $n$ — число волн в окружном направлении.

В случае шарнирного опирания имеем:

$$\text{при } x=0 \;\; w=0; \;\; \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (4)$$

Используя эти условия, получим:

$$A_2 = -A_1; \quad A_3 = 0{,}5A_1.$$

Тогда

$$w = A_1e^{-kx}(1 - \cos kx + 0{,}5\sin kx)\cos n\beta. \quad (5)$$

Для определения произвольных постоянных в выражении (3) для функции напряжений используем условия:

$$\text{при } x=0 \;\; \sigma_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0; \;\; \sigma_{xy} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = 0. \quad (6)$$

В результате найдем

$$B_2 = -B_1; \quad B_3 = 0.$$

Тогда

$$\varphi_1 = B_1e^{-kx}(1 - \cos kx)\cos n\beta. \quad (7)$$

Аппроксимации (5) и (7) позволяют решить задачу в первом приближении.

Интегрируя уравнения (1) по методу Бубнова-Галеркина, получим при $\nu=0{,}3$:

$$M = k_{\text{м}} \frac{Eh^3}{R}, \tag{8}$$

где
$$k_{\text{м}} = \frac{6{,}045 + 7{,}215z + 6{,}97125z^2 + 3{,}315z^3 + 1{,}06z^4}{13{,}3224z + 6{,}6612z^2 + 4{,}996z^3},$$

$z = \left(\frac{n}{Rk}\right)^2$ — параметр волнообразования.

Минимизируя (8) по $z$, найдем $k_{\text{м}} = 0{,}946$. Соответствующее число волн в окружном направлении $n = 1{,}189Rk$. Таким образом, первое приближение дает:

$$M_{\text{кр}} = 0{,}946 \frac{Eh^3}{R}. \tag{9}$$

Последующие приближения строятся на уточнении аппроксимации (7) для функции напряжений при сохранении выражения (5) для прогиба.

Возьмем последующие аппроксимации функции напряжений в виде

$$\varphi_2 = B_1 e^{-kx} [(1-\cos kx) + e^{-kx}(1-\cos 2kx)] \cos n\beta;$$

$$\varphi_3 = B_1 e^{-kx} [(1-\cos kx) + e^{-kx}(1-\cos 2kx) + e^{-2kx}(1-\cos 3kx)] \cos n\beta;$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + B_1 e^{-(i+1)kx} [1-\cos(i+1)kx] \cos n\beta, \tag{10}$$

где $i=1, 2, 3,\ldots$

Интегрируя уравнения (1) с использованием (5) и (10), получим результаты, представленные в таблице 1.

Как видно из таблицы, уточненное решение задачи достигается в шестом приближении:

$$M_{\text{кр}} = 0{,}905 \frac{Eh^3}{R}. \tag{11}$$

Формула (11) дает значение критической нагрузки, близкое к решению, приведенному в [2].

2. В случае свободного края схема расчета остается прежней. Здесь потеря устойчивости оболочки возможна при направлении моментов, обратном тому, которое показано на фиг. 1. Усилие $N_y$ по-прежнему определяется из расчета докритического состояния оболочки:

$$N_y = 2MRk^2 e^{-kx} (\cos kx - \sin kx). \tag{12}$$

Свободный край оболочки характеризуется отсутствием перерезывающих сил $V_x$ и изгибающих моментов $M_x$. Поэтому функция $w$ должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\text{при } x=0 \;\; \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \tag{13}$$

*Таблица 1*

| №№ | $k_м$ | $z$ | $n(Rк)^{-1}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,946 | 1,413 | 1,189 |
| 2 | 0,936 | 1,333 | 1,155 |
| 3 | 0,866 | 1,178 | 1,085 |
| 4 | 0,915 | 1,263 | 1,124 |
| 5 | 0,907 | 1,241 | 1,114 |
| 6 | 0,905 | 1,236 | 1,112 |
| 7 | 0,905 | 1,234 | 1,111 |

*Таблица*

| №№ | $k_м$ | $z$ | $n(Rk)^{-1}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,213 | 0,484 | 0,696 |
| 2 | 0,192 | 0,387 | 0,622 |
| 3 | 0,166 | 0,288 | 0,537 |
| 4 | 0,177 | 0,328 | 0,573 |
| 5 | 0,175 | 0,321 | 0,566 |
| 6 | 0,175 | 0,319 | 0,565 |
| 7 | 0,175 | 0,319 | 0,565 |

Используя (13), найдем из (2) при $\nu=0,3$:

$$w = \frac{A_1 e^{-kx}}{2+1,4z+0,255z^2}[(2+1,4z+0,255z^2) -$$

$$-(0,55z+0,255z^2)\cos kx + (1+0,4z)\sin kx]\cos n\beta. \qquad (1$$

Здесь, как и выше, $z = \left(\frac{n}{Rk}\right)^2$.

На свободном краю оболочки отсутствуют дополнительные напряжения $\sigma_x$ и $\sigma_{xy}$. Следовательно, вид функции напряжений по-прежнему определяется аппроксимациями (7) и (10). Использу последние, в первом приближении получим:

$$M = k_м \frac{Eh^3}{R},$$

где

$$k_м = \frac{f_1+f_2}{f_3 f_4},$$

$$f_1 = 93,6 + 277,68z + 629,288z^2 + 691,0488z^3;$$

$$f_2 = 464,588z^4 + 192,243z^5 + 42,558z^6 + 4,338z^7 + 0,228z^8; \qquad (1$$

$$f_3 = 0,8736z + 0,4368z^2 + 0,3276z^3;$$

$$f_4 = 2816 + 2324z + 441,48z^2 - 20,808z^3 - 2,2608z^4.$$

Минимизация выражения (15) по параметру $z$ дает:

$$k_м = 0,213.$$

И здесь уточненное решение достигается в шестом приближении:

$$M_{кр} = 0,175\frac{Eh^3}{R}, \quad n = 0,565Rk. \qquad (1$$

Результаты расчета сведены в таблицу 2.

3. Рассмотренная задача может быть решена и энергетическим методом.

Полная потенциальная энергия оболочки [1]:

$$Э = \frac{1}{2Eh}\int_0^\infty\int_0^{2\pi R}[\varphi_{xx}^2+\varphi_{yy}^2-2\nu\varphi_{xx}\varphi_{yy}+2(1+\nu)\varphi_{xy}^2]\,dxdy+$$

$$+\frac{D}{2}\int_0^\infty\int_0^{2\pi R}[w_{xx}^2+w_{yy}^2+2\nu w_{xx}w_{yy}+2(1-\nu)w_{xy}^2]\,dxdy+$$

$$+N_y\int_0^\infty\int_0^{2\pi R}\left[\frac{1}{Eh}(\varphi_{xx}-\nu\varphi_{yy})-\frac{1}{2}w_y^2\right]dxdy. \qquad (17)$$

Здесь индексы $x$ и $y$ означают дифференцирование по этим переменным.

На основании метода Ритца функционал (17) может быть представлен как функция варьируемых параметров $A_1$ и $B_1$, связь между которыми получим, интегрируя первое уравнение системы (1) по методу Бубнова-Галеркина:

$$A_1 = B_1\frac{R}{Ehk}f_7\frac{2+1,4z+0,255z^2}{6+1,5z-0,51z^2}. \qquad (18)$$

После подстановки выражений (7), (12), (14) и (18) в формулу (17) в первом приближении получим

$$Э = 0,002935\frac{B_1^2}{Eh}f_7[(f_5+f_6)Eh^3-f_3f_4MR], \qquad (19)$$

где

$$f_5 = 93,6+277,68z+618,992z^2+685,9z^3;$$

$$f_6 = 460,721z^4+192,24z^5+42,556z^6+4,338z^7+0,228z^8;$$

$$f_7 = 8k^3+4k\left(\frac{n}{R}\right)^2+3\left(\frac{n}{R}\right)^4\frac{1}{k}.$$

Варьируя (19) по параметру $B_1$ из условия $\frac{\partial Э}{\partial B_1}=0$ найдем

$$M = \frac{f_5+f_6}{f_3f_4}\frac{Eh^3}{R}. \qquad (20)$$

Минимизируя выражение (20) по $z$, получим

$$M_{кр} = 0,212\frac{Eh^3}{R}, \quad z = 0,487. \qquad (21)$$

Формула (21) дает значение критической нагрузки, которое лишь в третьем знаке отличается от результата, приведенного в таблице 2 для первого приближения. При этом расхождение результатов не превышает 0,5%.

В случае шарнирного опирания оболочки расчет энергетическим методом в первом приближении дает значение критической нагрузки, точно совпадающее с формулой (9).

Можно ожидать, что и все последующие приближения энергетического метода совпадут с результатами, полученными методом Бубнова Галеркина.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Авдонин. Прикладные методы расчета оболочек и тонкостенных конструкций. «Машиностроение», 1969.

2. Сборник «Расчет пространственных конструкций», вып. XI, Госстройиздат, 1967.