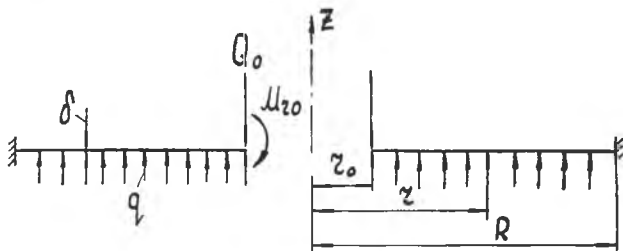


Б. А. ГОРЛАЧ

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ ОСЕСИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ

Рассмотрим кольцевую пластину, нагруженную равномерно распределенной поперечной нагрузкой q и по внутреннему контуру ($r=r_0$) погонной нормальной силой Q_0 и погонным радиальным моментом M_{r0} (фиг. 1).



Фиг. 1.

Принимаем следующие допущения:

- 1) пластина недеформируема в своей плоскости;
- 2) нагружение простое;
- 3) материал пластины несжимаем (коэффициент Пуассона $\mu=0,5$).

На фиг. 2 показаны положительные направления внутренних усилий, моментов и перемещений.

1. Уравнения равновесия пластины имеют вид [2]:

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\theta}{r} + Q = 0; \quad Q = -Q_0 \frac{r_0}{r} - \frac{q}{r} (r^2 - r_0^2). \quad (1)$$

Здесь

$$M_r = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_r z dz, \quad M_\theta = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_\theta z dz.$$

где, в свою очередь [1]:

$$\sigma_r = \frac{4}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} \left(x_1 + \frac{1}{2} x_2 \right) z, \quad \sigma_\theta = \frac{4}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} \left(x_2 + \frac{1}{2} x_1 \right) z, \quad (2)$$

$$x_1 = -\frac{d^2 w}{dr^2}, \quad x_2 = -\frac{1}{r} \frac{dw}{dr}, \quad (3)$$

$$\frac{\sigma_i}{e_i} = E(1 - \omega), \quad \omega = f(e_i).$$

$w(r)$ — прогиб срединной поверхности пластины;

σ_i — интенсивность напряжений;

e_i — интенсивность деформаций:

$$e_i = \frac{2z}{\sqrt{3}} P_x, \quad P_x = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2, \quad (4)$$

z — расстояние от срединной поверхности пластины, измеряемое в положительном направлении w .

С учетом (2) и (3) выражения для моментов примут вид:

$$M_r = \frac{4E}{3} \left(I - \frac{\delta^3}{12} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{2r} \frac{dw}{dr} \right) \quad (5)$$

$$M_\theta = \frac{4E}{3} \left(I - \frac{\delta^3}{12} \right) \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right), \quad (6)$$

$$I = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \omega z^2 dz. \quad (7)$$

Подставляя (5) и (6) в (1) и полагая $t = \ln \frac{r}{R}$, получим:

$$\frac{d^3 w}{dt^3} - 2 \frac{d^2 w}{dt^2} = \varphi + Ne^{2t} + Pe^{4t}. \quad (8)$$

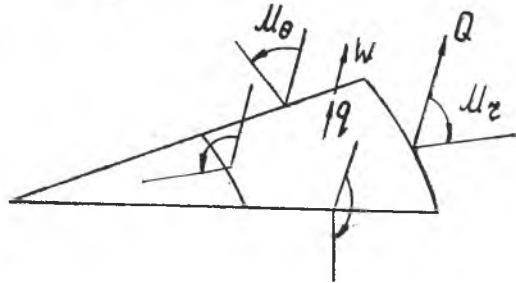
Здесь:

$$\varphi = \frac{12}{\delta^3} \left\{ -\frac{3}{2} \frac{d^2 w}{dt^2} I + \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{d^2 w}{dt^2} - \frac{1}{2} \frac{dw}{dt} \right) I \right] \right\}, \quad (9)$$

$$N = \frac{9R^4 e^{t_0}}{E \delta^3} \left(\frac{Q_0}{R} - \frac{e^{t_0}}{2} q \right),$$

$$P = \frac{9R^4 q}{2E \delta^3},$$

$$t_0 = \ln \frac{r_0}{R}.$$



Фиг. 2.

2. Квазилинейное дифференциальное уравнение (8) решаем

методом последовательных приближений (методом упругих решений А. А. Ильюшина). За исходное (нулевое) приближение принимаем решение упругой задачи ($\varphi^{(0)}=0$). Исходя из этого решения, по формуле (9) находим $\varphi^{(1)}$, после чего правая часть уравнения (8) становится известной. Решая снова это уравнение, находим $\omega^{(1)}$ и т. д.

Для n -го приближения получаем уравнение:

$$\frac{d^3 \omega^{(n)}}{dt^3} - 2 \frac{d^2 \omega^{(n)}}{dt^2} = \varphi^{(n)} + N e^{2t} + P e^{4t},$$

решение которого имеет вид:

$$\omega^{(n)} = C_1^{(n)} + C_2^{(n)} t + C_3^{(n)} e^{2t} + \frac{N}{4} e^{2t} t + \frac{P}{32} e^{4t} + \omega_p^{(n)}.$$

Здесь $\omega_p^{(n)}$ — функция, удовлетворяющая уравнению:

$$\frac{d^3 \omega_p^{(n)}}{dt^3} - 2 \frac{d^2 \omega_p^{(n)}}{dt^2} = \varphi^{(n)}.$$

Откуда:

$$\frac{d^2 \omega_p^{(n)}}{dt^2} = 2 \frac{d\omega_p^{(n)}}{dt} + \int_{t_0}^t \varphi^{(n)} dt. \quad (10)$$

Так как функция $\frac{d\omega_p^{(n)}}{dt}$ нам неизвестна, то заменяя ее на известную функцию $\frac{d\omega_p^{(n-1)}}{dt}$ и произведя частичное интегрирование функции $\varphi^{(n)}$, запишем (10) в таком виде ($n = 1, 2, \dots$)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \omega_p^{(n)}}{dt^2} = 2 \frac{d\omega_p^{(n-1)}}{dt} + \frac{12}{\delta^3} \left(\frac{d^2 \omega^{(n-1)}}{dt^2} - \frac{1}{2} \frac{d\omega^{(n-1)}}{dt} \right) I^{(n-1)} - \\ - \frac{18}{\delta^3} \int_{t_0}^t \frac{d^2 \omega^{(n-1)}}{dt^2} I^{(n-1)} dt, \end{aligned}$$

причем $\frac{d\omega_p^{(0)}}{dt} = 0$.

Отсюда:

$$\frac{d\omega_p^{(n)}}{dt} = \int_{t_0}^t \frac{d^2 \omega_p^{(n)}}{dt^2} dt, \quad \omega_p^{(n)} = \int_{t_0}^t \frac{d\omega_p^{(n)}}{dt} dt.$$

Постоянные интегрирования $C_i^{(n)}$ определяются из граничных условий.

3. Полагаем, что для материала пластины зависимость σ_i от e_i имеет вид, показанный на фиг. 3. Тогда [1]:

$$\omega = \lambda \left(1 - \frac{e_s}{e_l} \right), \quad \lambda = \left(1 - \frac{E'}{E} \right). \quad (11)$$

Эпюра распределения интенсивности деформаций по толщине пластины имеет вид, показанный на фиг. 4, причем если:

$$e_{i1} = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{3}} P_x < e_s, \quad (12)$$

то по всей толщине пластины имеет место упругое напряженное состояние.

Учитывая (11) и (4) и произведя замену переменной в (7) по формулам

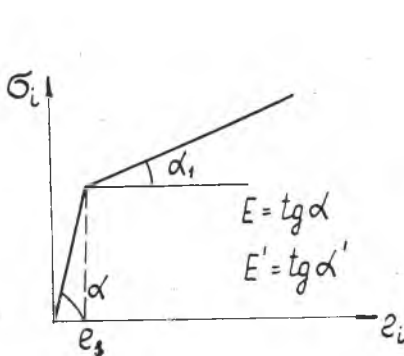
$$z = \frac{\sqrt{3} e_i}{2 \sqrt{P_x}} \operatorname{sign} de_i, \quad dz = \frac{\sqrt{3} de_i}{2 \sqrt{P_x}} \operatorname{sign} de_i,$$

получим

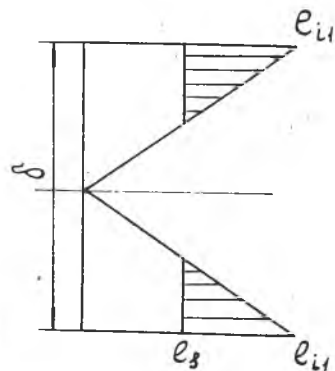
$$I = 2 \int_{e_s}^{e_i} \lambda \left(1 - \frac{e_s}{e_i} \right) \frac{3 \sqrt{3} de_i}{8 P_x \sqrt{P_x}}.$$

Проинтегрировав, будем иметь:

$$I = \frac{\sqrt{3} \lambda e_s^3}{8 P_x \sqrt{P_x}} [(2 \bar{e}_{i1} - 3) \bar{e}_{i1}^2 + 1],$$



Фиг. 3.



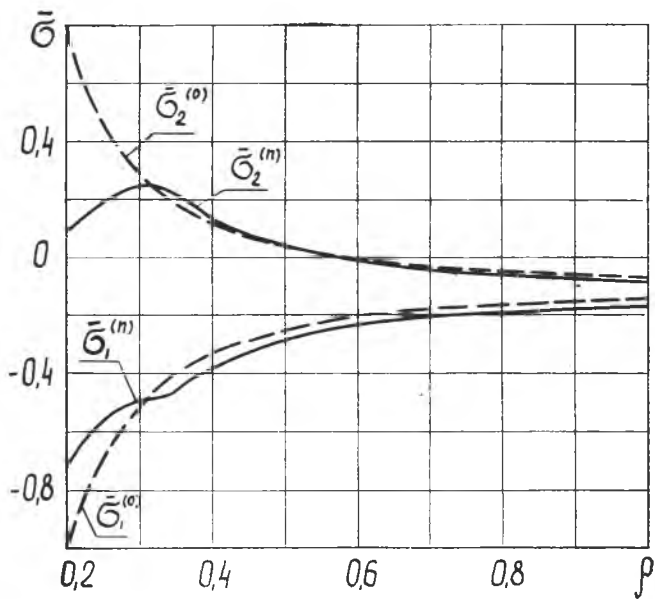
Фиг. 4.

$$I = 0, \quad \text{если} \quad \bar{e}_{i1} = \frac{e_{i1}}{e_s} \leq 1.$$

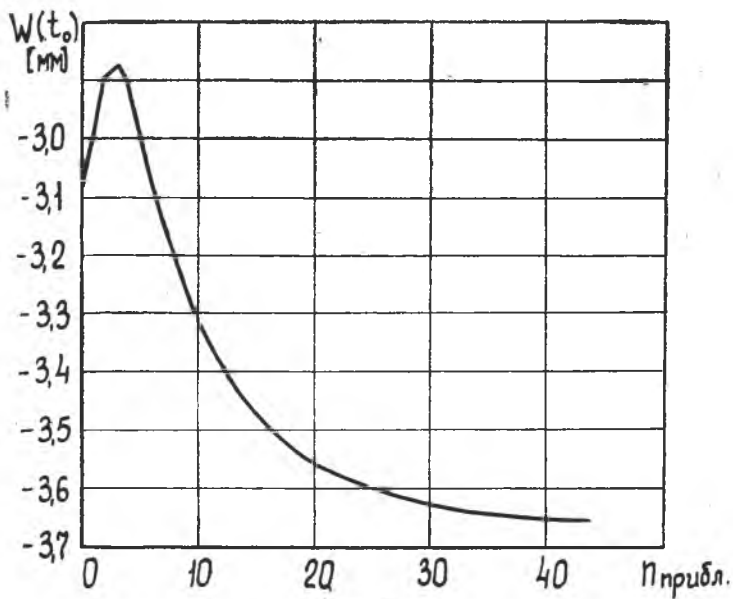
4. В качестве примера рассмотрим кольцевую пластину, жестко закрепленную по наружному контуру и нагруженную по внутреннему контуру погонным моментом M_{r0} .

Граничные условия имеют вид:

- при $t = t_0$: 1) $M_r^{(n)} = M_{r0}$,
- при $t = 0$: 2) $w^{(n)} = 0$,
- 3) $\frac{dw^{(n)}}{dt} = 0$.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

Используя эти условия, получим для постоянных интегрирования такие выражения:

$$C_3^{(n)} = -\frac{1}{1 + 3e^{2t_0}} \left[\frac{9R^2 e^{2t_0} M_{r_0}}{E \delta^3} + \frac{1}{2} \frac{dw_\rho^{(n)}(0)}{dt} \right],$$

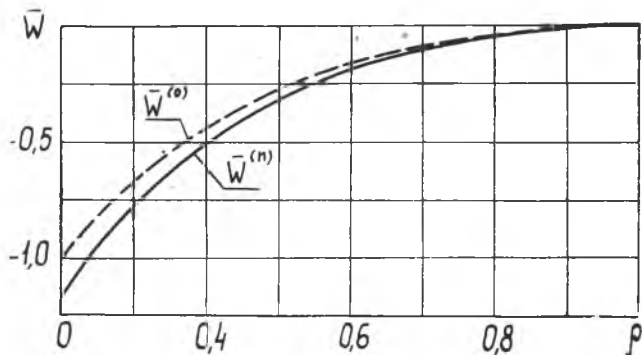
$$C_2^{(n)} = -2C_3^{(n)} - \frac{dw_\rho^{(n)}(0)}{dt}, \quad C_1^{(n)} = C_3^{(n)} - w_\rho^{(n)}(0).$$

Найдя значения $\kappa_1^{(n)}$, $\kappa_2^{(n)}$ и $e_{i1}^{(n-1)}$ по формулам (3) и (12), определим напряжения:

$$\sigma_r^{(n)} \left(\pm \frac{\delta}{2} \right) = \pm \frac{2}{3} E \delta \left[1 - \lambda \left(1 - \frac{1}{e_{i1}^{(n-1)}} \right) \right] \left(\kappa_1^{(n)} + \frac{1}{2} \kappa_2^{(n)} \right),$$

$$\sigma_\theta^{(n)} \left(\pm \frac{\delta}{2} \right) = \pm \frac{2}{3} E \delta \left[1 - \lambda \left(1 - \frac{1}{e_{i1}^{(n-1)}} \right) \right] \left(\kappa_2^{(n)} + \frac{1}{2} \kappa_1^{(n)} \right).$$

Для пластины с размерами $R = 100$ мм, $r_0 = 20$ мм, $\delta = 1,5$ мм, выполненной из материала, имеющего $E = 2,1 \cdot 10^4$ кг/мм², $E' = 1,07 \cdot 10^3$ кг/мм², $e_s = 2,45 \cdot 10^{-3}$ и нагруженной моментом $M_{r_0} = 30$ кг, был произведен расчет на ЭВМ «Урал-2». Результаты расчета представлены на графиках фиг. 5, 6 и 7. Здесь:



Фиг. 5.

$$\bar{\sigma}_i = \frac{\sigma_i \left(-\frac{\delta}{2} \right)}{|\sigma_r^{(0)}(t_0)|}, \quad \bar{w} = \frac{w}{|w^{(0)}(t_0)|}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Ильюшин. Пластичность. Гостехиздат, 1948.
2. С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. Пластинки и оболочки, М., 1966.