

А. С. Мостовой, Э. И. Миноранский А. А. Чураков
Л. К. Фролов

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОЛГОВЕЧНОСТИ ОБРАЗЦА ПРИ РАСТЯЖЕНИИ—СЖАТИИ

В расчетах долговечности образцов и деталей машин широко распространение имеет теория линейного суммирования усталостных повреждений. Однако известно, что эта теория во многих случаях дает значительное расхождение с результатами эксперимента. Это, по-видимому, объясняется тем, что она не учитывает характер нагружения, наличия концентрации напряжений и других факторов.

В настоящей работе для расчета долговечности используется линейная теория в видоизмененной постановке. В основу расчетов положены представления о механизме усталостного разрушения, изложенные в работе [1]. Согласно этим представлениям образец рассматривается как совокупность дискретных элементов — волокон, не оказывающих друг на друга давления. Линейная теория суммирования усталостных повреждений применяется к отдельному волокну. При таком подходе накопление повреждений в волокне должно определяться его напряженным состоянием, рассмотренным с учетом истории его нагружения.

Зависимость напряжений в нем от разрушающего числа циклов — кривая усталости по трещине — может быть получена экспериментальным путем. Появление первой макротрещины трактуется как разрушение наиболее напряженного волокна.

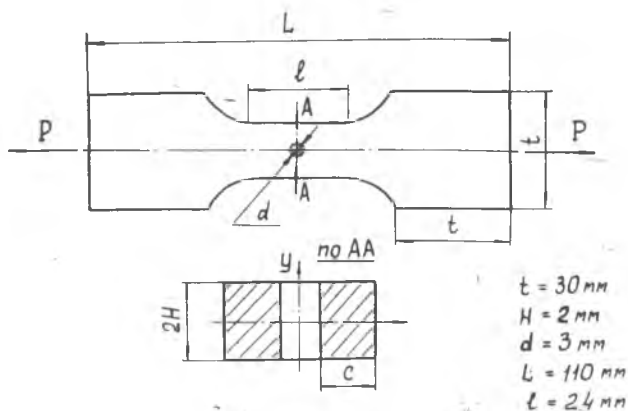
Таким образом, если известно время, соответствующее возникновению трещины и описан процесс ее распространения, то можно быть рассчитана долговечность образца.

Определение долговечности образца при гармоническом нагружении

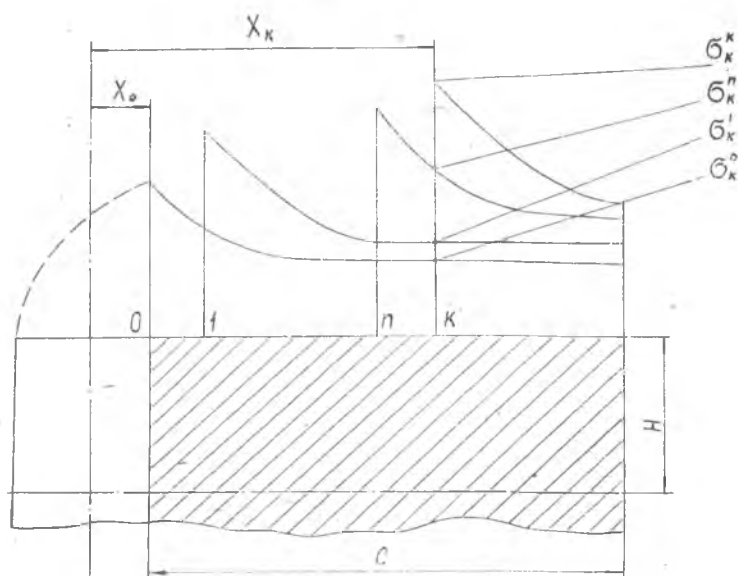
Рассмотрим плоский образец с концентратором в виде отверстия, растягиваемый силой P (фиг. 1).

Пусть волокно k (фиг. 2) с координатой x_k имеет в момент его разрушения напряжение σ_k^k . Соответствующее разрушающее число циклов, найденное по кривой усталости по трещине, обозначим N_k^k .

Предполагаем, что образец работает в условиях плоского напряженного состояния и разрушение всех волокон с координатой



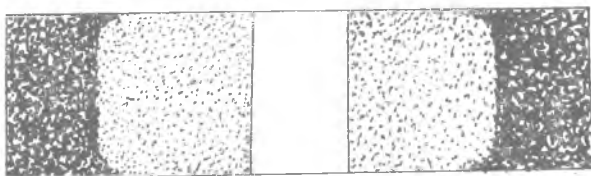
Фиг. 1.



Фиг. 2.

$x_k = \text{const}$ (фиг. 3) происходит одновременно. Разрушение образцов произойдет в тот момент, когда напряжение в неповрежденной части сечения достигнет действительного предела прочности материала σ'_D .

Обозначим через σ_k^0 напряжение в волокне k в момент времени τ_0 , соответствующий появлению трещины.



Фиг. 3.

За время τ_0 в волокне k будет накоплено повреждение

$$D_k^0 = \frac{\tau_0 \cdot f}{N_k^0}, \quad (1)$$

где f — частота гармонической нагрузки.

Пусть в момент времени $\tau > \tau_0$ при координате конца трещины $x_0 \leq x \leq x_k$ в волокне k действует напряжение $\sigma_h^0 \leq \sigma_k \leq \sigma_k^k$. Ему соответствует разрушающее число циклов N_k .

Повреждение волокна k за время $\tau_k - \tau_0$ (где τ_k — момент разрушения волокна k) определится из выражения

$$D_k = \int_{\tau_0}^{\tau_k} \frac{f d\tau}{N_k} = \int_{x_0}^{x_k} \frac{f}{N_k} \left(\frac{d\tau}{dx} \right) dx. \quad (2)$$

В момент разрушения волокна k будем иметь

$$D_k^0 + D_k = \frac{\tau_0 \cdot f}{N_k^0} + \int_{x_0}^{x_k} \frac{f}{N_k} \left(\frac{d\tau}{dx} \right) dx = 1. \quad (3)$$

Воспользуемся линейной аппроксимацией кривой усталости трещине в полулогарифмических координатах:

$$\ln N_k = a - b\sigma_k = -x_k. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), получим интегральное уравнение относительно производной $\frac{d\tau}{dx}$ — величины, обратной скорости распространения трещины вдоль оси x :

$$1 - \frac{\tau_0 \cdot f}{e^{a-b\sigma_k^0}} = \int_{x_0}^{x_k} \frac{f}{e^{a-b\sigma_k}} \frac{d\tau}{dx} dx. \quad (5)$$

Учитывая, что производная $\frac{d\tau}{dx}$ зависит от истории нагружения волокон, разрушившихся ранее k -го волокна, т. е. не зависит от x_k , решение уравнения (5) получим в виде:

$$\left(\frac{d\tau}{dx}\right)_k = - \left[\tau_0 \frac{e^{\alpha_k^0}}{e^{\alpha_{k+1}^0}} b \frac{d\alpha_k^0}{dx} + \frac{1}{e^{\alpha_{k+1}^0}} \int_{x_0}^{x_k} \left(\frac{d\tau}{dx}\right) \frac{\partial}{\partial x} (e^{\alpha_k}) dx \right]. \quad (6)$$

Заменим интеграл суммой, переходя к конечным приращениям. При этом обозначим через σ_k^n напряжение в волокне k в момент разрушения волокна n . Соответственно $\alpha_k^n = b\sigma_k^n - a$. Полагая, что (фиг. 2) $x_n = x_{n-1} + \Delta x_{n-1}$, $\tau_n = \tau_{n-1} + \Delta\tau_{n-1}$, где $\Delta\tau_{n-1}$ — время действия напряжения σ_k^n , из (6) получим:

$$\left(\frac{d\tau}{dx}\right)_k = - \left[\tau_0 b \frac{d\alpha_k^0}{dx_k} e^{\alpha_k^0 - \alpha_{k+1}^{k+1}} + \sum_{n=1}^k \left(\frac{d\tau}{dx}\right)_{n-1} (e^{\alpha_{k+1}^n - \alpha_{k+1}^{k+1}} - e^{\alpha_k^n - \alpha_{k+1}^{k+1}}) \frac{\Delta x_{n-1}}{\Delta x_k} \right]. \quad (7)$$

Тогда долговечность образца определится из выражения:

$$T = \tau_0 + \sum_{k=0}^{k_p} \left(\frac{d\tau}{dx}\right)_k \Delta x_k, \quad (8)$$

где номер волокна k_p соответствует условию $\sigma_{k_p}^p = \sigma'_d$.

В дальнейшем будем предполагать, что испытания образца проводятся при постоянных перемещениях. При этом изменение его жесткости в процессе роста усталостной трещины сопровождается изменением силы, действующей на образец. Последнее обстоятельство учитывается с помощью методики, изложенной в работе [2]. Жесткость ее сводится к замене поврежденного образца с переменной жесткостью образцом такой же формы с постоянной жесткостью EF_{np} , определяемой из условия равенства перемещений обоих образцов в точке приложения нагрузки.

Зная приведенную жесткость EF_{np} , можно определить внешнюю нагрузку P_t действующую на поврежденный образец:

$$\frac{P_t}{P_0} = \frac{EF_{np}^k}{EF_0} = \bar{F}_{np}^k. \quad (9)$$

Для определения величины α_k^k найдем напряжение σ_k^k . На другом участке диаграммы растяжения будем иметь

$$\sigma_k^k = \frac{P_0}{F_0} \xi_k \alpha_k^k, \quad (10)$$

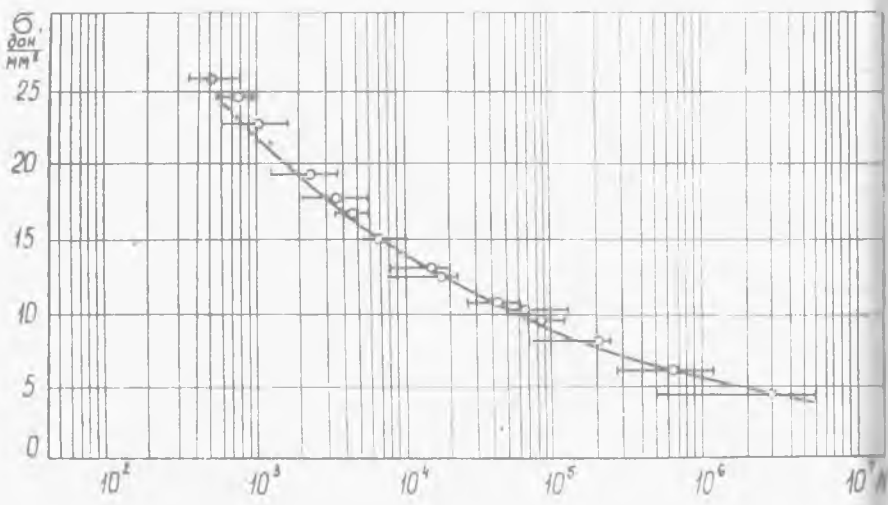
где α_k^k — теоретический коэффициент концентрации напряжений в вершине трещины, распространившейся до точки k ;

$\frac{F_0}{F_k}$ - коэффициент, учитывающий изменение нагрузки и поврежденной

площади сечения, $\bar{F}_k = \frac{F_k}{F_0}$

Запишем выражение для ξ_k [2]:

$$\xi_k = \frac{0,81}{\bar{F}_k} + 0,19\bar{F}_k. \quad (11)$$



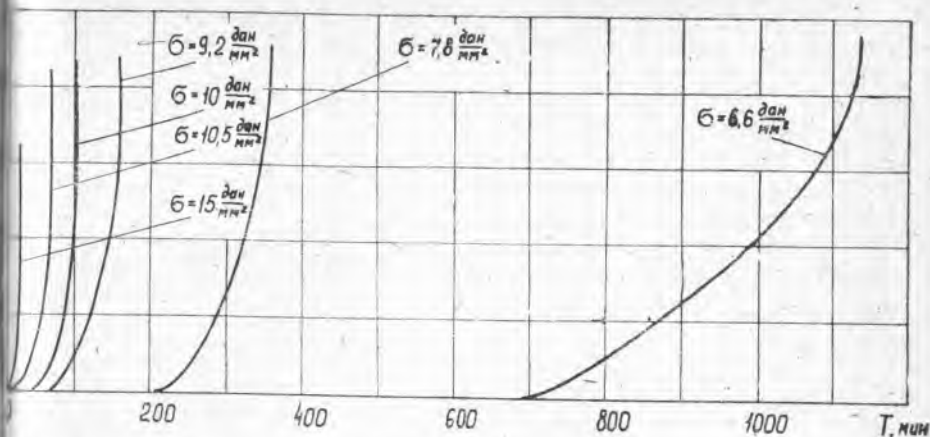
Фиг. 4.

Напряжения σ_k^n на нелинейном участке диаграммы растяжения определим по средней деформации, считая ее связанной с деформацией в вершине трещины (ϵ_k) соотношением

$$\epsilon_k = \alpha_k^k \epsilon_{cp} = \alpha_k^k \frac{P_0}{F_0 E} \xi_k. \quad (12)$$

На фиг. 4 приведены результаты расчета долговечности при растяжении—сжатии гармонической нагрузкой образца, изображенного на фиг. 1 и выполненного из сплава АМг-6М. На этой же фигуре представлены результаты эксперимента. Расчетная кривая достаточно хорошо согласуется с опытными данными.

На фиг. 5 показаны кривые зависимости относительной поврежденной площади \bar{F}_k от времени τ . Для них характерно нелинейное нарастание \bar{F}_k по τ с резким увеличением скорости $\frac{d\bar{F}_k}{d\tau}$ к моменту разрушения. Значение \bar{F}_k^{pa-p} для низких уровней нагружения больше, чем для высоких, т. к. напряжение, равное пределу прочности σ_b , в этом случае имеет место при меньшей величине поврежденной части сечения.



Фиг. 5.

Определение долговечности образца при случайном нагружении

Строгое определение долговечности образца при случайном нагружении в свете рассмотренных представлений практически невозможно, т. к. повреждение волокна в каждый момент времени зависит от чередования случайных нагрузок. Определение долговечности при случайном нагружении существенно упрощается, если заменить случайный процесс изменения напряжений эквивалентным (в смысле долговечности) программным. Возможность такой замены хорошо подтверждается экспериментом.

По результатам статистической обработки достаточно представительной реализации случайного процесса строится кумулятивная функция распределения, которая используется затем для составления блока программного нагружения.

Для расчета долговечности образца при программной нагрузке, эквивалентной случайной, пользуемся изложенными выше представлениями о механизме усталостного разрушения, рассматривая программную нагрузку как совокупность гармонических нагрузок.

Пусть R — число блоков продолжительностью $t_b = \text{const}$ каждый, v — число уровней напряжений (ступеней) в блоке, $t_v \neq \text{const}$ — продолжительность одного уровня напряжения. Будем вести отсчет уровней от начала нагружения, не связывая его с числом блоков. Обозначим через v порядковый номер уровня до появления трещины.

Время t_0 до появления трещины, учитывая линейное накопление повреждений для волокна, определим из выражений

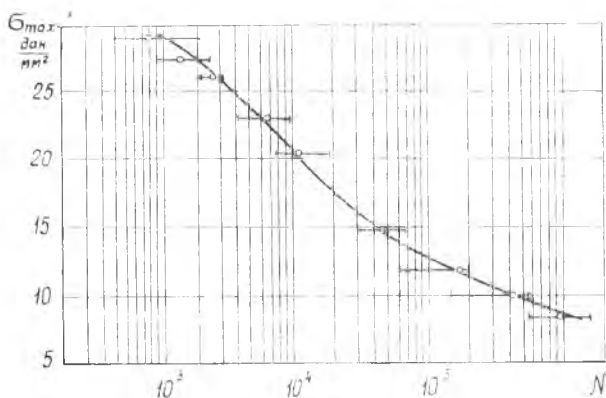
$$D_0 = \sum_{v=1}^{v_0} \frac{n_v}{N_v} = \sum_{v=1}^{v_0} t_v f e^{b\sigma_v^a - a} = 1, \quad (13)$$

$$\tau_0 = \sum_{v=1}^n t_{v_0} \quad (14)$$

где v_0 — порядковый номер уровня программной нагрузки в момент появления трещины.

Сопоставление результатов расчета по формулам (13) и (14) и данных опыта для указанных выше образцов из сплава АМг-6М произведено на фиг. 6.

Примем далее, что рассматриваются такие смежные волокна, время разрушения которых отличается на длительность одной ступени, т. е. $\Delta\tau_k = t_v$. Кроме того, будем считать, что скорость роста



Фиг. 6

трещины в пределах одной ступени постоянна. Тогда для $\left(\frac{d\tau}{dx}\right)_k$ при программном нагружении, с учетом (7), запишется в виде:

$$\left(\frac{d\tau}{dx}\right)_k = - \left[\sum_{v=1}^{v_0} t_v b \frac{d\tau_{v_0}^0}{dx_R} e^{z_{k,v}^0} z_{(k+1),v}^{k+1} + \sum_{n=1}^k \left(\frac{d\tau}{dx}\right)_{n-1} \left(e^{z_{(k+1),v}^n} z_{(k+1),v}^{k+1} - e^{z_{k,v}^n} z_{(k+1),v}^{k+1} \right) \frac{\Delta x_{n-1}}{\Delta x_k} \right] \quad (15)$$

Здесь $z_v^0 = b\sigma_v^0 - a$, v — порядковый номер уровня программной нагрузки после появления трещины. Напряжения σ_v^0 и $\sigma_{k,v}^n$ находятся, как указано выше.

Используя (14) и (15), долговечность при программном нагружении можно определить из выражения:

$$T = \sum_{v=1}^{v_0} t_v + \sum_{k=0}^{v_0} \left(\frac{d\tau}{dx}\right)_k \Delta x_k \quad (16)$$

Параметры шестнадцатиступенчатого симметричного блока программной нагрузки, для которого производился расчет, приведены в таблице 1, в которой $k_v = \frac{\sigma_v}{\sigma_{v-1}}$ (для 1-го уровня $k_v = 1$).

Таблица 1

v	1	2	3	4	5	6	7	8
k_v	1,0	2,04	3,08	4,125	5,17	6,2	7,25	8,3
t , [сек]	8	10	10	9	6	5	3	1

Расчет долговечности T при программном нагружении производился с переменным шагом Δt . Исследование, проведенное для оценки влияния переменного шага на точность расчета, показало, что изменение шага от 0,5 до 10 сек практически не влияет на результаты расчета. Для определения долговечности по уравнениям (15) и (16) использовалась ЭВМ «Урал-2». Однако, в связи с ее ограниченными возможностями, расчет при напряжениях $\sigma_{max} < 20$

$\frac{\text{дан}}{\text{мм}^2}$ довести до конца не удалось. Для определения долговечности при тех уровнях напряжений был использован метод форсированных программных нагрузок, предложенный Ю. С. Урбанским [3]. Сущность его заключается в том, что долговечность при искомом уровне напряжений σ_{max}^0 ($k_{\phi} = 1$) определяется линейной экстраполяцией прямой $k_{\phi} = f(\lg T)$, построенной для нескольких точек

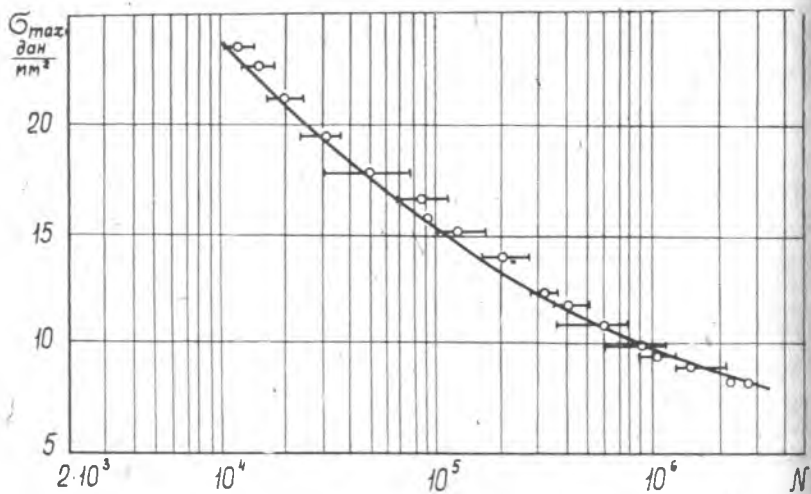
$k_{\phi} = \frac{\sigma_{max}^{\phi}}{\sigma_{max}^0} > 1$. Здесь σ_{max}^{ϕ} — амплитуда максимальных напряжений «форсированного» блока, долговечность при действии которого получена расчетным путем.

В таблице 2 приведены результаты расчета при программном нагружении и экспериментальные данные. Совпадение расчета и эксперимента вполне удовлетворительное.

Таблица 2

$\sigma_{max} \left[\frac{\text{дан}}{\text{мм}^2} \right]$	27,3	26	23	20,4	14,8	11,4	8,7
$T_{\text{эксп}}$ [мин]	3,5	6,16	20,3	45	250	734	2830
$T_{\text{расч}}$ [мин]	3,17	6,66	19,2	40	200	665	3330

На фиг. 7 приведена расчетная кривая усталости по разрушению при программном нагружении. Здесь же нанесены опытные результаты при случайных нагрузках.



Фиг. 7.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Мостовой. Определение долговечности образца на основе некоторых представлений о механизме усталостного разрушения. Труды КУА, вып. 39, Куйбышев, 1968.
2. А. С. Мостовой, Э. И. Миноранский, В. И. Архипов. Влияние усталостной трещины на изменение жесткости образца при растяжении-сжатии. Помещена в настоящем сборнике.
3. Ю. С. Урбанский. Метод форсирования усталостных испытаний при программном нагружении. Сб. «Прочность и долговечность авиационных конструкций». Труды КИИ ГВФ, вып. II, Киев, 1965.