

СТЕСНЕННОЕ КРУЧЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ

Рассмотрим тонкостенный стержень с круговой осью, имеющий открытый поперечный профиль. Предполагаем, что толщина стержня мала по сравнению с поперечным сечением, а габариты сечения — по сравнению с радиусом кривизны оси стержня. Модули упругости материала стержня могут быть переменными как по контуру поперечного сечения, так и по его длине. Стержень находится в поле переменных температур. Внешние нагрузки — произвольные поверхностные усилия и сосредоточенные на торцах обобщенные силы.

Имея формулы обобщенных сил криволинейного стержня \bar{N} , \bar{M}_x , \bar{M}_y и формулу для нормальных напряжений через функции обобщенных перемещений, можно получить следующие дифференциальные уравнения упругой линии:

$$\ddot{\xi} - \frac{1}{\rho_0} \dot{\xi} = \frac{\bar{N}}{E_0 F} + \frac{N_t}{F} + k \left\{ x_T \left[\frac{M_{\tau y}}{E_0 I_{\tau y}} - \frac{M_{\tau yt}}{I_{\tau y}} + \frac{I_{\tau xy}}{I_{\tau y}} \left(\frac{M_{\tau x}}{E_0 I_{\tau x}} + \frac{M_{\tau xt}}{I_{\tau x}} \right) \right] + \right. \\ \left. + y_T \left[-\frac{M_{\tau x}}{E_0 I_{\tau x}} - \frac{M_{\tau xt}}{I_{\tau x}} - \frac{I_{\tau xy}}{I_{\tau x}} \left(\frac{M_{\tau y}}{E_0 I_{\tau y}} - \frac{M_{\tau yt}}{I_{\tau y}} \right) \right] \right\} - \omega_0^* \left(\ddot{\Theta} + \frac{1}{\rho_0^2} \Theta \right); \quad (1)$$

$$\ddot{\xi} + \frac{1}{\rho_0^2} \dot{\xi} = k \left[\frac{M_{\tau y}}{E_0 I_{\tau y}} - \frac{M_{\tau yt}}{I_{\tau y}} + \frac{I_{\tau xy}}{I_{\tau y}} \left(\frac{M_{\tau x}}{E_0 I_{\tau x}} + \frac{M_{\tau xt}}{I_{\tau x}} \right) \right] + \\ + y_d \left(\ddot{\Theta} + \frac{1}{\rho_0^2} \Theta \right); \quad (2)$$

$$\ddot{\eta} - \frac{1}{\rho_0} \dot{\eta} = k \left[-\frac{M_{\tau x}}{E_0 I_{\tau x}} - \frac{M_{\tau xt}}{I_{\tau x}} - \frac{I_{\tau xy}}{I_{\tau x}} \left(\frac{M_{\tau y}}{E_0 I_{\tau y}} - \frac{M_{\tau yt}}{I_{\tau y}} \right) \right] - \\ - x_d \left(\ddot{\Theta} + \frac{1}{\rho_0^2} \Theta \right). \quad (3)$$

Подставляя значения $\zeta - \frac{1}{\rho_0} \xi$, $\dot{\zeta} + \frac{1}{\rho_0^2} \dot{\xi}$, $\ddot{\zeta} + \frac{1}{\rho_0^2} \ddot{\xi}$, $\eta - \frac{1}{\rho_0} \Theta$ в формулу бимоента, полученную из естественных граничных условий, найдем зависимость приведенного бимоента от функции угла поворота

$$B_{\omega^*} = -E_0 I_{\omega^*} \left(\ddot{\Theta} + \frac{1}{\rho_0^2} \Theta \right) - E_0 B_{\omega^* t}, \quad (4)$$

где

$$I_{\omega^*} = I_{\omega} - (S_{\omega y} - y_T S_{\omega}) x_d + (S_{\omega x} - x_T S_{\omega}) y_d - \frac{S_{\omega}^2}{F};$$

$$B_{\omega^* t} = \int \alpha t(z, s) \omega^*(s) \varphi(z, s) \bar{\rho}(s) \delta(z, s) ds;$$

$$B_{\omega^*} = B_{\omega} - x_d M_{T\bar{x}} - y_d M_{T\bar{y}} - \frac{S_{\omega}}{F} \bar{N}. \quad (5)$$

Уравнения Эйлера для функционала в виде полной потенциальной энергии термоупругой системы являются уравнениями равновесия в перемещениях. Если в эти уравнения внести значения обобщенных сил (18)*, то они примут вид

$$\frac{d\bar{N}}{dz} + q_z = 0;$$

$$\frac{dQ_{\bar{x}}}{dz} + \frac{1}{\rho_0} \bar{N} - \frac{1}{\rho_0^2} M_{\bar{y}} + q_x = 0;$$

$$\frac{dQ_{\bar{y}}}{dz} + q_y = 0;$$

$$\frac{dM_{\bar{z}}}{dz} + \frac{1}{\rho_0^2} B_{\omega} - \frac{1}{\rho_0} M_{\bar{x}} + m_z = 0. \quad (6)$$

Следствием естественных граничных условий являются дифференциальные зависимости

$$\frac{dM_{\bar{x}}}{dz} - Q_{\bar{y}} + \frac{H}{\rho_0} + m_x = 0; \quad (7)$$

$$\frac{dM_{\bar{y}}}{dz} + Q_{\bar{x}} + m_y = 0;$$

$$\frac{dB_{\omega}}{dz} - M_{\omega} = 0. \quad (8)$$

* Климов В. И., Булычев Л. А. Напряженное состояние тонкостенного криволинейного стержня. Настоящий сб., стр. 103.

Переходя к обычным обобщенным силам, принятым в теории криволинейных рам, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN}{dz} - \frac{1}{\rho_0} Q_x + q_z &= 0, \\ \frac{dQ_x}{dz} + \frac{1}{\rho_0} N + q_x &= 0, \\ \frac{dM_y}{dz} + Q_x + m_y &= 0, \\ \frac{dQ_y}{dz} + q_y &= 0, \\ \frac{dM_z}{dz} - \frac{1}{\rho_0} M_x + m_z &= 0, \\ \frac{dM_x}{dz} + \frac{1}{\rho_0} M_z - Q_y + m_x &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Уравнения (9) совпадают с известными уравнениями равновесия криволинейных рам.

Уравнение равновесия, относящееся к кручению (6), записанное в перемещениях, после применения формул (1) — (3) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} \left[I_{\omega^*} \left(\ddot{\Theta} + \frac{1}{\rho_0^2} \Theta \right) \right] - \frac{G_0}{E_0} \frac{d}{dz} \left[I_k \frac{\rho_d}{\rho_0} \left(\dot{\Theta} + \frac{1}{\rho_0} \dot{\gamma}_1 \right) \right] = \\ = - \frac{1}{E_0} \frac{M_{xd}}{\rho_0} + \frac{1}{E_0} (m_{zd} + \dot{b}_{\rho\omega^*}) - \ddot{B}_{\omega^* t}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$M_{xd} = M_x - y_d N;$$

$$m_{zd} = m_z - x_d q_y + y_d q_x;$$

$$b_{\rho\omega^*} = b_{\rho} - x_d m_x - y_d m_y + \omega_0^* q_z.$$

Из уравнения (10) следует как частный случай уравнение стесненного кручения прямолинейного стержня, полученное в работе [2]. Для этого достаточно положить $\rho_0 \rightarrow \infty$. Стесненному кручению криволинейного стержня непременно сопутствует прогиб из плоскости, а потому характеризуется двумя функциями: η и Θ .

Уравнение (10) совместно с уравнением прогиба стержня из плоскости (3) и определяет стесненное кручение криволинейного стержня. Система уравнений стесненного кручения (3) и (10) сводится к дифференциальному уравнению относительно функции

кривизны кручения $\chi = \frac{1}{\rho_0} R(z)$:

$$\frac{1}{\rho_0^3} \frac{d^2}{dz^2} \left[I_{\omega^*} \dot{R} + \rho_0^2 \frac{d^2}{dz^2} (I_{\omega^*} \dot{R}) \right] - \frac{1}{\rho_0^3} \frac{G_0}{E_0} \frac{d}{dz} \left[I_k \cdot R + \rho_0^2 \frac{d^2}{dz^2} (I_k R) \right] =$$

$$= \frac{1}{E_0 \rho_0^2} (q_y \cdot \dot{\zeta}_d + \dot{m}_{zd} \rho_0 + \ddot{m}_{zd} \rho_0^2 + \dot{b}_{\rho\omega^*} + \dot{b}_{\rho\omega^*} \zeta_0^2 - - E_0 \ddot{B}_{\omega^* t} - E_0 \zeta_0^2 B_{\omega^* t}^1), \quad (11)$$

где $R = \zeta_0 \ddot{\Theta} + \ddot{\gamma}_t$, $m_{zd} = m_x - y_d q_z$.

Полученное уравнение может называться уравнением стесненного кручения криволинейного стержня с переменными параметрами упругости в условиях неравномерного нагрева.

В случае постоянных по длине параметров упругости уравнение (10) записывается в функции приведенного бимоента

$$\ddot{B}_{\omega^*} - \frac{G_0 I_k \rho_d^2}{E_0 I_{\omega^*}} \frac{B_{\omega^*}}{\rho_0^2} = \frac{M_{zd}}{\rho_0} + \frac{G_0 k I_k I_{\tau xy}}{E_0 I_{\tau x} I_{\tau y}} \cdot \frac{M_y}{\rho_0} - - m_{zd} - \dot{b}_{\rho\omega^*} + \frac{G_0 I_k \rho_x^2}{I_{\omega^*}} \cdot \frac{B_{\omega^* t}}{\rho_0^2}. \quad (12)$$

После преобразования уравнения (12) получим

$$B_{\omega^*}^{1V} + (1 - b) \frac{B_{\omega^*}}{\rho_0^2} - b \frac{B_{\omega^*}}{\rho_0^4} = -q_y \frac{\rho_d}{\rho_0^2} - \dot{m}_{zd} \frac{\rho_d}{\rho_0^2} - \ddot{m}_{zd} - \dot{b}_{\rho\omega^*} + + \frac{G_0 k I_k}{E_0 I_{\tau x} \rho_0^2} \left[m_z + \dot{b}_\rho + \frac{I_{\tau xy}}{I_{\tau y}} \left(\frac{1}{\rho_0} M_y - \dot{m}_y \right) \right] + E_0 b \left(\frac{\dot{B}_{\omega^* t}}{\rho_0^2} + \frac{B_{\omega^* t}}{\rho_0^4} \right). \quad (13)$$

Здесь $b = \frac{G_0 I_k \rho_d^2}{E_0 I_{\omega^*}}$.

Заметим, что между сен-венановским крутящим моментом, бимоментом и изгибающими моментами устанавливается зависимость

$$\frac{dH}{dz} = -b \cdot \frac{B_{\omega^*}}{\rho_0^2} - b E_0 \frac{B_{\omega^* t}}{\rho_0^2} - \frac{G_0 k I_k}{E_0 I_{\tau x}} \frac{M_x}{\rho_0} + \frac{I_{\tau xy}}{I_{\tau y}} \frac{M_y}{\rho_0}. \quad (14)$$

Здесь $\left(\frac{\bar{\gamma}_0}{\rho_0} \right)^2 \left(\left| \frac{M_x}{\rho_0} \right| + \left| \frac{I_{\tau xy} M_y}{I_{\tau y} \rho_0} \right| \right) \ll \left| \frac{1}{\rho_0^2} B_{\omega^*} \right|$,

поэтому можно считать, что приведенный бимомент пропорционален производной кривизны кручения

$$B_{\omega^*} + E_0 B_{\omega^*} = -E_0 I_{\omega^*} \left(\ddot{\Theta} + \frac{1}{\rho_0^2} \ddot{\gamma}_t \right). \quad (15)$$

Именно этой зависимостью пользуется В. З. Власов [1].

В силу пренебрежимо малого различия формул (15) и (4) уравнение прогиба (3) может быть заменено более простым

$$\ddot{\gamma}_t - \frac{1}{\rho_0} \Theta = 0. \quad (16)$$

Последовательность решения задачи состоит в следующем. Отыскивается общее решение дифференциального уравнения (13). В соответствии с зависимостью (4) записывается общее решение для функции угла закручивания θ . Первые три дифференциальные уравнения равновесия (9) определяют общие решения для обобщенных сил N, Q_x, M_y .

Подставляя общие решения для бимоента и обобщенных сил N, Q_x, M_y в уравнение (12), получаем изгибающий момент M_x с точностью до пяти постоянных интегрирования.

Крутящий сен-венаповский момент выражается также с точностью до постоянных интегрирования по формуле (14).

Полный крутящий момент M_z есть сумма момента чистого кручения H и изгибно-крутящего момента $M_\omega = \dot{B}_\omega$. Учитывая зависимость приведенного бимоента (5), нетрудно найти бимомент B_ω и далее величину полного крутящего момента.

Обобщенный изгибающий момент \bar{M}_x находится по формуле

$$M_x^- = M_x + \frac{1}{\rho_0} B_\omega.$$

Обобщенная перерезывающая сила \bar{Q}_y определяется из уравнения (7). Равнодействующая потока касательных сил на ось Oy равна

$$Q_y = \bar{Q}_y - \frac{1}{\rho_0} H.$$

Таким образом, с точностью до постоянных интегрирования находятся все обобщенные силы. Неизвестные функции перемещений ζ, ξ, η с точностью до постоянных интегрирования определяются из уравнений (1), (2), (16).

Рассмотрим пример кручения тонкостенного стержня длиной $l = \frac{\pi}{2} \rho_0$. Одно торцевое сечение стержня жестко заделано. На другом конце приложена перерезывающая сила и крутящий момент (рис. 1 и 2).

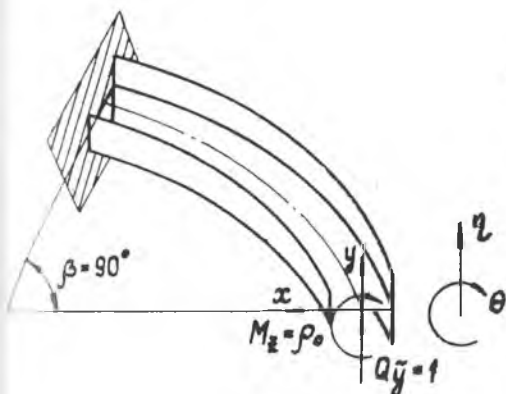


Рис. 1.

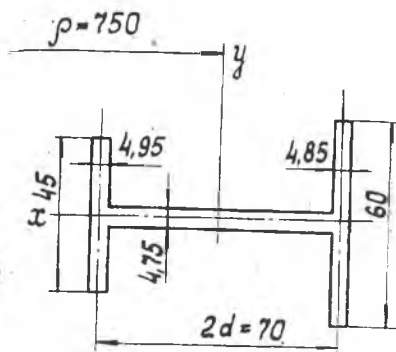


Рис. 2.

Кинематические граничные условия следующие:

$$\begin{aligned} \zeta(0) = 0; \quad \xi(0) = 0; \quad \xi'(0) = 0; \quad \eta(0) = 0; \quad \eta'(0) = 0; \quad \Theta(0) = 0; \\ \Theta'(0) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Статические граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{N}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad Q_{\bar{x}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; \quad Q_{\bar{y}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \\ M_{\bar{x}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad M_{\bar{y}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad M_z\left(\frac{\pi}{2}\right) = \rho_0, \quad B_{\omega}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Упруго-геометрические характеристики стержня получаются следующими:

$$\begin{aligned} x_{\tau} = -0,081d; \quad y_{\tau} = 0; \quad k = 1; \quad I_{\tau xy} = 0; \\ I_{\tau x} = 0,556d^3 \delta; \quad I_{\tau y} = 3,52d^3 \delta; \quad I_k = 1,5d\delta^3; \\ I_{\omega^*} = 0,513d^5 \delta; \quad x_d = -0,278d; \quad y_d = 0; \quad \omega_0^* = 0; \quad b = 10,9. \end{aligned}$$

Для данных параметров стержня при граничных условиях (17) и (18) обобщенные силы и перемещения имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{N} \equiv 0; \quad Q_{\bar{x}} \equiv 0; \quad M_{\bar{y}} \equiv 0; \quad Q_{\bar{y}} \equiv 1; \quad M_z \equiv \rho_0; \\ \frac{1}{\rho_0} M_{\bar{x}} = -0,309 \cdot 0,64 \operatorname{ch} \sqrt{b} \beta + 0,309 \cdot 0,83 \operatorname{sh} \sqrt{b} \beta; \\ \frac{1}{\rho_0^2} B_{\omega^*} = -0,306 \cdot 807 \operatorname{ch} \sqrt{b} \beta + 0,306 \cdot 826 \operatorname{sh} \sqrt{b} \beta; \\ Q_y = \operatorname{ch} \sqrt{b} \beta - \operatorname{sh} \sqrt{b} \beta; \\ \frac{1}{\rho_0} M_{\omega^*} = 1,012 \cdot 877 \operatorname{ch} \sqrt{b} \beta - 1,012 \cdot 817 \operatorname{sh} \sqrt{b} \beta; \\ \zeta(\beta) \equiv 0; \quad \xi(\beta) \equiv 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0} \eta(\beta) = 2,93 \cdot 10^{-2} (\beta - \sin \beta) - 0,887 \cdot 10^{-2} (1 - \cos \beta) + \\ + 9,581 \cdot 4 \cdot 10^{-4} (\operatorname{ch} \sqrt{b} \beta - 1) - 9,581 \cdot 9 \cdot 10^{-4} (\operatorname{sh} \sqrt{b} \beta - \sqrt{b} \beta); \\ \Theta(\beta) = 2,93 \cdot 10^{-2} \sin \beta + 8,87 \cdot 10^{-3} (\operatorname{ch} \sqrt{b} \beta - \cos \beta - \operatorname{sh} \sqrt{b} \beta). \end{aligned}$$

Графики прогиба и угла поворота построены на рис. 3 и 4. Там же точками приведены экспериментальные значения.

Нормальные напряжения в сечении стержня находятся по формуле

$$\sigma_z(\beta, \bar{s}) = \frac{1}{d\delta} \left[\frac{d^3 \delta}{I_{\tau x}} \frac{\rho_0^2}{d \cdot \rho_d} \cdot \bar{y}^*(\bar{s}) + \frac{d^5 \delta}{I_{\omega^*}} \left(\frac{\rho_0}{d} \right)^2 \bar{\omega}^*(\bar{s}) \right] \frac{1}{\rho_0} B_{\omega^*}(\beta),$$

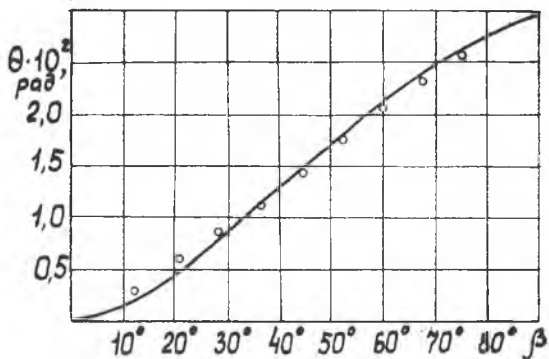


Рис. 3.

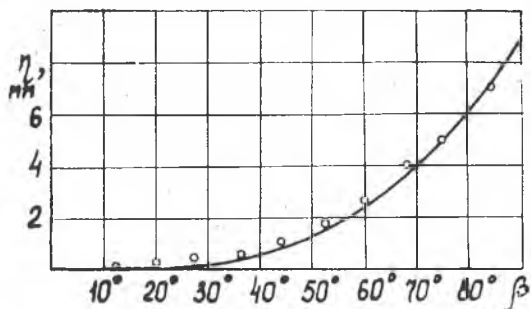


Рис. 4.

где

$$\bar{y}^*(\bar{s}) = \begin{cases} 1,1\bar{y}, & \text{при } \bar{x} = 1, \quad |\bar{y}| \leq 0,64 \\ 0, & \text{при } |\bar{x}| \leq 1, \quad \bar{y} = 0, \\ 0,913\bar{y}, & \text{при } \bar{x} = -1, \quad |\bar{y}| \leq 0,86. \end{cases}$$

$$\bar{\omega}^*(s) = \begin{cases} 1,405\bar{y}, & \text{при } \bar{x} = 1, \quad |\bar{y}| \leq 0,64 \\ 0, & \text{при } |\bar{x}| \leq 1, \quad \bar{y} = 0, \\ -0,66\bar{y}, & \text{при } \bar{x} = -1 \quad |\bar{y}| \leq 0,86. \end{cases}$$

Эшюры нормальных напряжений в сечениях $\beta=6^\circ$ и $\beta=38^\circ$ даны на рис. 5 и 6.

График нормальных напряжений по кромке стержня построен на рис. 7. Точками отмечены экспериментальные значения нормальных напряжений.

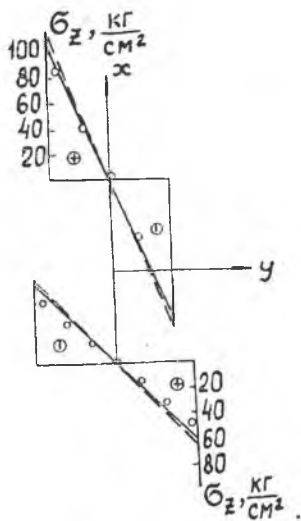


Рис. 5.

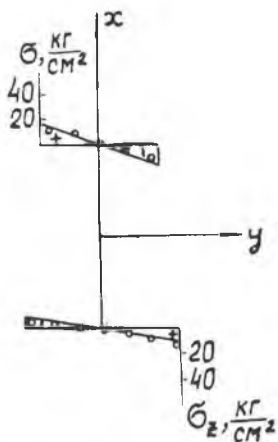


Рис. 6.

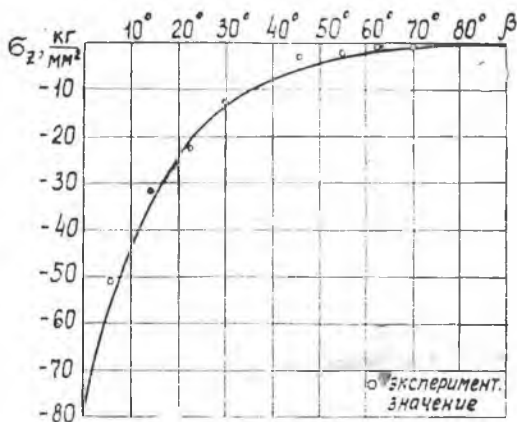


Рис. 7.

Нормальные напряжения по кромке ($\bar{x} = -1$ $\bar{y} = -0,78$) пропорциональны бимоменту. Сравнение результатов расчета и эксперимента дает оценку гипотез теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. Физматгиз, 1959.
2. Климов В. И. Цилиндрические тонкостенные конструкции открытого профиля с переменными параметрами упругости при неравномерном нагреве. ИВУЗ, серия «Авиационная техника», 1967.