

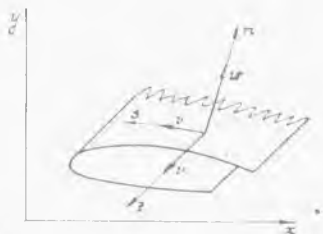
В. И. КЛИМОВ

## РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ПРОДОЛЬНЫХ ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ

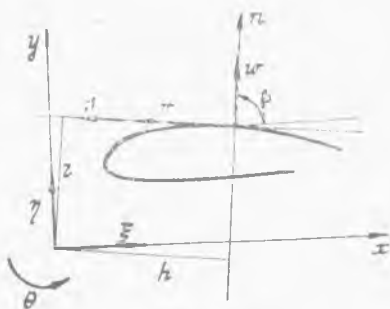
Рассматриваются цилиндрические (фиг. 1) тонкостенные конструкции произвольного профиля с любым законом изменения по сечению и длине толщины и параметров упругости.

$$\delta = \delta(z, s), \quad E = E(z, s), \quad G = G(z, s). \quad (1)$$

Сечение отнесено к произвольно расположенной системе осей координат. При этом не вводятся такие геометрические понятия как центр тяжести, главные центральные оси, центр изгиба, главные секториальные характеристики и т. п.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

В общем случае методика расчета в главных центральных осях или обобщенных главных центральных осях при изменяющихся параметрах упругости может привести к затруднениям при вычислении силовых и геометрических характеристик.

Для получения основных соотношений используем вариационный принцип Лагранжа.

Потенциальная энергия цилиндрических оболочек определяется по формуле

$$U = \iint \left[ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - 2(1 - \mu) \left( \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 - \frac{\gamma^2}{4} \right) \right] \frac{E \cdot \delta}{2(1 - \mu^2)} ds dz + \\ + \iint \left[ (\kappa_1 + \kappa_2)^2 - 2(1 - \mu)(\kappa_1 \cdot \kappa_2 - \kappa_3^2) \right] \frac{E \cdot \delta^3}{24(1 - \mu^2)} ds dz. \quad (2)$$

Компоненты деформаций и перемещений связаны зависимостями

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \gamma = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial s}, \quad \kappa_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \quad \kappa_3 = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v}{R_2} - \frac{\partial w}{\partial s} \right). \quad (3)$$

Примем следующие допущения: контур поперечного сечения не изменяется в своей плоскости ( $\varepsilon_2 = 0, \kappa_2 = 0$ ), деформации сдвига в срединной поверхности отсутствуют ( $\gamma = 0$ ).

Потенциальную энергию деформаций (2) с учетом принятых допущений представим в виде:

$$U = \int_0^l \left[ E_0 \oint \left( \frac{\varepsilon_1^2 \delta^2}{2} + \frac{\kappa_1^2 \delta^3}{24} \right) ds + G_0 \oint \frac{\kappa_3^2 \delta^3}{6} ds \right] dz, \quad (4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1(z, s) &= \frac{E_1(z, s)}{E_0}, \quad \phi(z, s) = \frac{G(z, s)}{G_0}, \quad E_1 = \frac{E(z, s)}{1 - \mu^2}, \\ G(z, s) &= \frac{E(z, s)}{2(1 + \mu)}, \quad \mu = \mu(z, s), \quad E_0 = \text{const}, \quad G_0 = \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Перемещения любой точки сечения согласно гипотезе о неизменяемости контура можно выразить через перемещения  $\xi(z)$  и  $\eta(z)$  выбранного полюса и угол поворота сечения  $\Theta(z)$  вокруг этого полюса (фиг. 2):

$$\left. \begin{aligned} v &= \xi \cdot x' + \eta \cdot y' + \Theta \cdot r, \\ w &= \xi \cdot y' - \eta \cdot x' + \Theta \cdot h. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Длины перпендикуляров на касательную и нормаль выражаются через координаты точек контура следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} r &= x \cdot y' - y \cdot x', \\ h &= -(x \cdot x' + y \cdot y'). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Здесь учтены зависимости

$$x'(s) = \frac{dx}{ds} = -\sin \beta, \quad y'(s) = \frac{dy}{ds} = \cos \beta. \quad (8)$$

В соответствии с гипотезой об отсутствии сдвигов в срединной поверхности из второго соотношения (3) с учетом (6) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{\partial v}{\partial z} = -\xi' x' - \eta' y' - \Theta' r.$$

Интегрируя это выражение, будем иметь

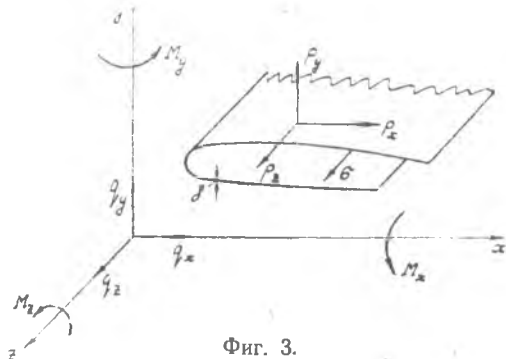
$$u = -\xi'(z) \cdot x(s) - \eta'(z) y(s) - \Theta'(z) \omega(s) + \zeta(z), \quad (9)$$

где

$$\omega(s) = \int_0^s r ds. \quad (10)$$

Компоненты деформаций на основании формул (3), (6), (9), (8) представим в виде

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= -\xi'' \cdot x - \eta'' \cdot y - \Theta'' \cdot \omega + \zeta', \\ x_1 &= -\xi'' \cdot y' + \eta'' \cdot x' - \Theta'' h, \\ x_3 &= \Theta'. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$



Фиг. 3.

Потенциальную энергию внешних нагрузок (фиг. 3) запишем так

$$T = - \int_0^l (q_x \cdot \xi + q_y \cdot \eta + m_z \Theta + \oint p_z u ds) dz. \quad (12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} q_x &= \oint p_x ds, \quad q_y = \oint p_y ds, \\ m_z &= \oint (p_y \cdot x - p_x \cdot y) ds. \end{aligned} \quad (13)$$

Отметим, что в соответствии с принятыми допущениями, нагрузку, действующую в плоскости сечения можно заменять любой статически эквивалентной, а продольную нагрузку приводить к статически эквивалентной в общем случае нельзя.

Подставляя значения (11) в (4), а (9) в (12) и суммируя потенциальную энергию деформаций и внешних нагрузок, получим полную потенциальную энергию упругой системы.

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \int_0^l \left\{ E_0 \oint \left[ \frac{1}{2} (-\xi'' x - \eta'' y - \Theta'' \omega + \zeta')^2 \varphi \delta + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{24} (-\xi'' y' + \eta'' x' - \Theta'' h)^2 \varphi \delta^3 \right] ds + \right. \end{aligned}$$

$$+ G_0 \oint \frac{\Theta^2 \psi \delta^3}{6} ds - q_x \cdot \xi - q_y \cdot \eta - q_z \cdot \zeta + \\ + \eta' \oint p_z y ds + \xi' \oint p_z x ds + \Theta' \oint p_z \omega ds - m_z \cdot \Theta \} dz, \quad (14)$$

В этом выражении

$$q_z = \oint p_z ds.$$

Уравнения Эйлера, являющиеся условиями стационарности функционала (14), имеют вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \frac{d}{dz} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi'} \right) + \frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi''} \right) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - \frac{d}{dz} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \eta'} \right) + \frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \eta''} \right) = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} - \frac{d}{dz} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta'} \right) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} - \frac{d}{dz} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta'} \right) + \frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta''} \right) = 0,$$

где  $\Phi$  — подынтегральная функция в (14).

Эти уравнения в развернутой форме будут

$$\left. \begin{aligned} -q_x - \frac{d}{dz} \oint p_z x ds + \frac{d^2}{dz^2} [E_0 (\xi'' I_{y\delta} + \eta'' I_{xy\delta} + \\ + \Theta'' S_{\omega x\delta} - \zeta' S_y)] = 0, \\ -q_y - \frac{d}{dz} \oint p_z y ds + \frac{d^2}{dz^2} [E_0 (\xi'' I_{xy\delta} + \eta'' I_{x\delta} + \\ + \Theta'' S_{\omega y\delta} - \zeta' S_x)] = 0, \\ -q_z - \frac{d}{dz} [E_0 (-\xi'' S_y - \eta'' S_x - \Theta'' S_\omega + \zeta' F)] = 0, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$-m_z - \frac{d}{dz} \oint p_z \omega ds - \frac{d}{dz} (G_0 I_\kappa \Theta') + \frac{d^2}{dz^2} [E_0 (\xi'' S_{\omega x\delta} + \\ + \eta'' S_{\omega y\delta} + \Theta'' I_{\omega\delta} - \zeta' S_\omega)] = 0. \quad (16)$$

Геометрические характеристики, входящие в уравнения (15) — (16) вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} I_{x\delta} &= \oint y^2 \varphi \delta ds + \frac{1}{12} \oint x'^2 \varphi \delta^3 ds, \quad I_\kappa = \oint \frac{\psi \delta^3}{3} ds, \\ I_{y\delta} &= \oint x^2 \varphi \delta ds + \frac{1}{12} \oint y'^2 \varphi \delta^3 ds, \quad S_y = \oint x \varphi \delta ds, \\ I_{xy\delta} &= \oint xy \varphi \delta ds - \frac{1}{12} \oint x' y' \varphi \delta^3 ds, \quad S_x = \oint y \varphi \delta ds, \\ S_{\omega x\delta} &= \oint \omega x \varphi \delta ds + \frac{1}{12} \oint h y' \varphi \delta^3 ds, \quad S_\omega = \oint \omega \varphi \delta ds, \\ S_{\omega y\delta} &= \oint \omega y \varphi \delta ds - \frac{1}{12} \oint h x' \varphi \delta^3 ds, \quad F = \oint \varphi \delta ds, \\ I_{\omega\delta} &= \oint \omega^2 \varphi \delta ds + \frac{1}{12} \oint h^2 \varphi \delta^3 ds. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Уравнения (15) и (16) являются уравнениями равновесия, записанными в перемещениях.

Если мы проинтегрируем уравнения (15), то будем иметь

$$\left. \begin{aligned} -M_y + E_0(\xi'' \cdot I_{y\delta} + \eta'' \cdot I_{xy\delta} + \Theta'' \cdot S_{\omega x\delta} - \zeta' S_y) &= 0, \\ M_x + E_0(\xi'' \cdot I_{xy\delta} + \eta'' \cdot I_{x\delta} + \Theta'' S_{\omega y\delta} - \zeta' S_x) &= 0, \\ N + E_0(\xi'' S_y + \eta'' S_x + \Theta'' S_{\omega} - \zeta' F) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} q_x &= \frac{d\Theta_x}{dz}, \quad q_y = \frac{dQ_y}{dz}, \quad q_z = \frac{dN}{dz}, \\ \oint p_z y ds - Q_y &= \frac{dM_x}{dz}, \quad Q_x - \oint p_z x ds = \frac{dM_y}{dz}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$N = \oint_{\delta} \sigma dn ds, \quad M_x = \oint_{\delta} \sigma y dn ds, \quad (20)$$

$$M_y = - \oint_{\delta} \sigma x dn ds.$$

Отметим, что поперечная и продольная нагрузки приведены к осям произвольно расположенных координат (фиг. 3).

Решая уравнения (18) относительно  $\zeta''$ ,  $\eta''$  и  $\zeta'$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} \xi'' &= k \left( \frac{M_{Ty}}{E_0 I_{Ty\delta}} + \frac{M_{Tx} I_{Tx\delta}}{E_0 I_{Tx\delta} I_{Ty\delta}} \right) + y_D \cdot \Theta'', \\ \eta'' &= -k \left( \frac{M_{Tx}}{E_0 I_{Tx\delta}} + \frac{M_{Ty} I_{Tx\delta}}{E_0 I_{Ty\delta} I_{Tx\delta}} \right) - x_D \cdot \Theta'', \\ \zeta' &= k \cdot x_T \left( \frac{M_{Ty}}{E_0 I_{Ty\delta}} + \frac{M_{Tx} I_{Tx\delta}}{E_0 I_{Tx\delta} I_{Ty\delta}} \right) - k \cdot y_T \left( \frac{M_{Tx}}{E_0 I_{Tx\delta}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{M_{Ty} I_{Tx\delta}}{E_0 I_{Ty\delta} I_{Tx\delta}} \right) - \bar{\omega}_0 \cdot \Theta'' + \frac{N}{E_0 F}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Здесь введены обозначения

$$M_{Tx} = M_x - y_T \cdot N, \quad M_{Ty} = M_y + x_T \cdot N, \quad (22)$$

$$x_T = \frac{S_y}{F}, \quad y_T = \frac{S_x}{F}.$$

$$I_{Tx\delta} = I_{x\delta} - y_T^2 F,$$

$$I_{Ty\delta} = I_{y\delta} - x_T^2 F, \quad k = \frac{1}{1 - \frac{I_{Tx\delta}^2}{I_{Tx\delta} I_{Ty\delta}}}, \quad (23)$$

$$I_{Txy\delta} = I_{xy\delta} - x_T y_T F.$$

$$\begin{aligned}
 x_D &= k \left[ \frac{1}{I_{\tau\delta}} (S_{\omega y\delta} - y_{\tau} S_{\omega}) - \frac{I_{\tau\chi\delta}}{I_{\tau\delta} I_{\tau y\delta}} (S_{\omega x\delta} - x_{\tau} S_{\omega}) \right]; \\
 y_D &= k \left[ -\frac{1}{I_{\tau y\delta}} (S_{\omega x\delta} - x_{\tau} S_{\omega}) + \frac{I_{\tau\chi y\delta}}{I_{\tau\delta} I_{\tau y\delta}} (S_{\omega y\delta} - y_{\tau} S_{\omega}) \right], \\
 \bar{\omega}_0 &= y_{\tau} \cdot x_D - x_{\tau} y_D - \frac{S_{\omega}}{F}.
 \end{aligned} \quad (24)$$

Решая систему уравнений равновесия (15) относительно производных линейных перемещений, а затем подставляя их в уравнение (16), получим

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2}{dz^2} (E_0 I_{\omega\delta}^{\sim} \Theta'') - \frac{d}{dz} (G_0 I_{\kappa} \Theta'') = m_z + \frac{d}{dz} \oint p_z \omega ds + \\
 + \frac{d^2}{dz^2} (y_D M_y^* + x_D M_x^* + \bar{\omega}_0 \cdot N).
 \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 I_{\omega\delta}^{\sim} &= I_{\omega\delta} + y_D (S_{\omega x\delta} - x_{\tau} S_{\omega}) - x_D (S_{\omega y\delta} - y_{\tau} S_{\omega}) - \frac{S_{\omega}^2}{F} = \\
 &= I_{\omega\delta} - x_D^2 I_{\tau\delta} - y_D^2 I_{\tau y\delta} + 2x_D y_D I_{\tau\chi y} - \frac{S_{\omega}^2}{F}.
 \end{aligned} \quad (26)$$

Силовые факторы связаны с поверхностной нагрузкой дифференциальными зависимостями

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 M_x^*}{dz^2} &= - \oint p_y ds - \frac{d}{dz} \oint p_z y ds, \\
 \frac{d^2 M_y^*}{dz^2} &= \oint p_x ds + \frac{d}{dz} \oint p_z x ds, \\
 \frac{d^2 N}{dz^2} &= \frac{d}{dz} \oint p_z ds, \quad m_z = \oint (p_y x - p_x y) ds.
 \end{aligned} \quad (27)$$

Геометрические характеристики  $I_{\omega\delta}^{\sim}$  и  $I_{\kappa}$  в общем случае могут зависеть от координаты  $z$ , поэтому уравнение (25) является уравнением с переменными коэффициентами и решение его в большинстве случаев находится методом последовательных приближений.

При некоторых частных видах изменения толщины и параметров упругости общий интеграл уравнения (25) выражается через табулированные функции [2], [3].

При постоянных по длине параметрах упругости и толщине уравнение (25) примет вид

$$E_0 I_{\omega\delta}^{\sim} \Theta^{IV} - G_0 I_{\kappa} \Theta'' = m + \frac{d}{dz} \oint p_z \omega ds, \quad (28)$$

где

$$m = \oint [p_y (x - x_D) - p_x (y - y_D)] ds, \quad (29)$$

$$\bar{\omega} = \omega - x_D(y - y_T) + y_D(x - x_T) - \frac{S_\omega}{F}. \quad (30)$$

Решение уравнения такого типа подробно рассмотрено, например, в [1].

Выразим  $\Theta''$  через бимомент  $B$ :

$$B = -E_0 I_{\omega\delta} \Theta'', \quad (31)$$

здесь

$$B = \oint \varepsilon \bar{\omega} dnds.$$

Соотношения (21) тогда запишутся в таком виде:

$$\begin{aligned} \xi'' &= k \left( \frac{M_{Ty}}{E_0 I_{Ty\delta}} - \frac{M_{Tx} I_{Tx\gamma\delta}}{E_0 I_{Tx\delta} I_{Ty\delta}} \right) - y_D \frac{B}{E_0 I_{\omega\delta}}, \\ \eta'' &= -k \left( \frac{M_{Tx}}{E_0 I_{Tx\delta}} + \frac{M_{Ty} I_{Ty\gamma\delta}}{E_0 I_{Ty\delta} I_{Tx\delta}} \right) + x_D \frac{B}{E_0 I_{\omega\delta}}, \\ \zeta' &= k x_T \left( \frac{M_{Ty}}{E_0 I_{Ty\delta}} + \frac{M_{Tx} I_{Tx\gamma\delta}}{E_0 I_{Tx\delta} I_{Ty\delta}} \right) - k y_T \left( \frac{M_{Tx}}{E_0 I_{Tx\delta}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{M_{Ty} I_{Ty\gamma\delta}}{E_0 I_{Ty\delta} I_{Tx\delta}} \right) + \bar{\omega}_0 \frac{B}{E_0 I_{\omega\delta}} + \frac{N}{E_0 F}. \end{aligned} \quad (32)$$

Нормальные напряжения, распределенные по толщине равномерно, в соответствии с принятыми допущениями и зависимостями (5) и (11), выразим через функции перемещений так:

$$\sigma = E_1 \cdot \varepsilon_1 = \varphi \cdot E_0 (-\xi'' \cdot x - \eta'' \cdot y - \Theta'' \omega + \zeta').$$

Подставляя сюда величины (32) и преобразуя, получим формулу для нормальных напряжений в следующем виде:

$$\sigma = \varphi(z, s) \left[ k \left( \frac{M_{Tx}}{I_{Tx\delta}} \bar{y} - \frac{M_{Ty}}{I_{Ty\delta}} \bar{x} \right) + \frac{N}{F} + \frac{B}{I_{\omega\delta}} \bar{\omega} \right], \quad (33)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= x - x_T - (y - y_T) \frac{I_{Tx\gamma\delta}}{I_{Tx\delta}}, \\ \bar{y} &= y - y_T - (x - x_T) \frac{I_{Ty\gamma\delta}}{I_{Ty\delta}}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Геометрическая характеристика  $\bar{\omega}$  вычисляется по формуле (30).

Нормальные напряжения, реализующие продольные изгибающие моменты  $M_1$ , определяются из соотношений

$$\sigma_1^{(n)} = E_1 \cdot \alpha_1 \cdot n, \quad \sigma_1 = \sigma_{1 \max} = E_1 \alpha_1 \frac{\delta}{2}, \quad (35)$$

Последнюю формулу на основании (5) и (11) представим в виде

$$\sigma_1 = \varphi E_0 \alpha_1 \frac{\delta}{2} = \varphi E_0 (-\xi'' y' + \eta'' x' - \Theta'' h) \cdot \frac{\delta}{2}.$$

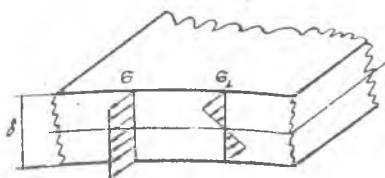
Подставляя в это выражение величины (32), получим

$$\sigma_1 = \mp \varphi(z, s) \cdot \frac{\delta}{2} \left[ k \left( \frac{M_{\tau y}}{I_{\tau y \delta}} \bar{y}' + \frac{M_{\tau x}}{I_{\tau x \delta}} \bar{x}' \right) - \frac{B}{I_{\omega \delta}} \bar{h} \right], \quad (36)$$

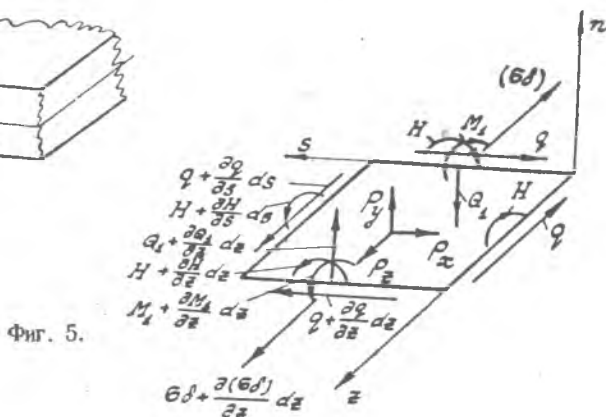
где

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}' &= y' + x' \frac{I_{\tau y \delta}}{I_{\tau x \delta}}, \quad \bar{x}' = x' + y' \frac{I_{\tau x \delta}}{I_{\tau y \delta}}, \\ \bar{h} &= h + x_D \cdot x' + y_D \cdot y'. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Нормальные напряжения (33) распределены по толщине равномерно, а напряжения (36) по линейному закону (фиг. 4).



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Касательные напряжения определяем из уравнений равновесия элемента оболочки (фиг. 5). Проектируя все усилия на ось  $z$ , получим

$$\frac{\partial q}{\partial s} + \frac{\partial(\sigma \cdot \delta)}{\partial z} + p_z = 0. \quad (38)$$

Интегрируем уравнение (38)

$$q = - \int_0^s \frac{\partial}{\partial z} (\sigma \cdot \delta) ds - \int_0^s p_z ds + q_0(z). \quad (39)$$

Подставляя сюда значение (33), получим

$$q = \frac{\partial}{\partial z} \left[ k \left( - \frac{M_{\tau y}}{I_{\tau y \delta}} \bar{S}_y - \frac{M_{\tau x}}{I_{\tau x \delta}} \bar{S}_x \right) - N \frac{\bar{F}}{F} - \frac{B}{I_{\omega \delta}} \bar{S}_\omega \right] - \int_0^s p_z ds + l_3,$$



где

$$\left. \begin{aligned} \bar{S}_x &= \int_0^s \bar{y} \varphi^2 ds, \quad \bar{S}_y = \int_0^s \bar{x} \varphi^2 ds, \\ \bar{S}_\omega &= \int_0^s \bar{\omega} \tau \delta ds, \quad F = \int_0^s \varphi \delta ds. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Если геометрические и упругие характеристики не зависят от координаты  $z$ , то согласно зависимостям (14), (20) и (22) имеем

$$\begin{aligned} \frac{dM_{\tau y}}{dz} &= Q_x - \oint p_z (x - x_\tau) ds, \quad \frac{dM_{\tau x}}{dz} = -Q_y + \\ &+ \oint p_z (y - y_\tau) ds \end{aligned} \quad (43)$$

и формула (41) примет вид

$$\begin{aligned} q &= k \left[ \frac{Q_x - \oint p_z (x - x_\tau) ds}{I_{\tau y \delta}} \bar{S}_y + \frac{Q_y - \oint p_z (y - y_\tau) ds}{I_{\tau x \delta}} \bar{S}_x \right] - \\ &- q_z \frac{\bar{F}}{F} - \frac{M_\omega}{I_{\omega \delta}} \bar{S}_\omega - \int_0^s p_z ds + q_0. \end{aligned} \quad (44)$$

Здесь принята следующая дифференциальная зависимость между бимоментом и изгибно-крутящим моментом

$$\frac{dB}{dz} = M_\omega. \quad (45)$$

В формулах (41) и (44) поток касательных напряжений  $q_0$  равен величине потока в начале отсчета координаты  $s$ . Если координата отсчитывается от крайней точки открытого профиля, где нет касательных напряжений или от такой точки контура, где заведомо известно, что касательные напряжения равны нулю, то  $q_0 = 0$ .

Продольные изгибающие моменты в силу принятого допущения о неизменяемости контура определяются формулой

$$M_1 = D \cdot \kappa_1,$$

причем

$$D = \frac{E \delta^3}{12(1-\mu^2)}.$$

На основании (5), (11) и (32) получим

$$M_1 = \kappa_1 E_0 \frac{\delta^3}{12} \kappa_1 = - \frac{\delta^3}{12} \left[ k \left( \frac{M_{\tau y}}{I_{\tau y \delta}} \bar{y}' + \frac{M_{\tau x}}{I_{\tau x \delta}} \bar{x}' \right) - \frac{B}{I_{\omega \delta}} \bar{h} \right]. \quad (46)$$

Отсюда находим перерезывающую силу  $Q_1$ :

$$Q_1 = \frac{\partial M_1}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\delta^3}{12} \left[ k \left( \frac{M_{\tau y}}{I_{\tau y \delta}} \bar{y}' + \frac{M_{\tau x}}{I_{\tau x \delta}} \bar{x}' \right) - \frac{B}{I_{\omega \delta}} \bar{h} \right] \right\}. \quad (47)$$

Если упругие и геометрические характеристики не зависят от координаты  $z$ , то согласно (43) и (45) последняя формула примет вид

$$Q_1 = -\tau \frac{\delta^3}{12} \left\{ k \left[ \frac{Q_x - \oint p_z(x - x_T) ds}{I_{T\gamma\delta}} \bar{y}, - \frac{Q_y - \oint p_z(y - y_T) ds}{I_{T\kappa\delta}} \bar{x}' \right] - \frac{M_{\text{кр}}}{I_{\omega\delta}} \bar{h} \right\}. \quad (48)$$

Касательные напряжения, реализующие поперечную силу  $Q_1$ , определяются так:

$$\tau_1 = -\frac{6Q_1}{\delta^3} \left( \frac{\delta^2}{4} - n^2 \right), \quad \tau_{1\text{max}} = \frac{3}{2} \frac{Q_1}{\delta}. \quad (49)$$

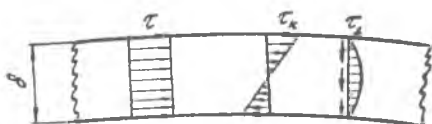
Касательные напряжения, соответствующие сен-венановскому кручению, распределены по толщине по линейному закону и их максимальная величина будет

$$\tau_{\kappa} = \frac{H}{I_{\kappa}} \delta. \quad (50)$$

Крутящий момент свободного кручения связан с углом поворота зависимостью

$$H = G_0 I_{\kappa} \Theta'. \quad (51)$$

Итак, в поперечном сечении действуют три вида касательных напряжений: 1) касательные напряжения  $\tau = \frac{q}{\delta}$ , распределенные по толщине равномерно, 2) касательные напряжения  $\tau_1$ , уравнивающие поперечную силу  $Q_1$  и распределенные по закону квадратной параболы и 3) касательные напряжения  $\tau_{\kappa}$ , уравнивающие крутящий момент  $H$  и распределенные по линейному закону. Характер изменения по толщине этих напряжений дан на фиг. 6.



Фиг. 6.

Полученные формулы позволяют сделать оценку напряжений. Сравним, например, максимальные величины нормальных напряжений (33), распределенных по толщине равномерно с нормальными напряжениями (36), распределенными по линейному закону.

От изгибающего момента  $M_x$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma} = \frac{\delta}{2} \frac{\bar{y}}{y}, \quad \text{причем } \bar{y} \leq 1, \text{ а } \bar{y} \approx \frac{b}{2}.$$

Поэтому

$$\frac{\sigma_1}{\sigma} \approx \frac{\delta}{b}, \quad (52)$$

где  $b$  — габаритный размер сечения по оси  $y$ .

От изгибающего момента  $M_{\text{гy}}$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma} = \frac{\delta}{2} \frac{\bar{x}'}{\bar{x}}, \quad \text{причем } \bar{x}' \leq 1, \text{ а } \bar{x} \approx \frac{a}{2}, \quad (53)$$

следовательно,  $\frac{\sigma_1}{\sigma} \approx \frac{\delta}{a}$ ,

здесь  $a$  — габаритный размер сечения по оси  $x$ .

От бимоента  $B$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma} = \frac{\delta}{2} \frac{\bar{h}}{\bar{\omega}}, \quad \text{приблизненно } \bar{h} \approx \frac{\sqrt{a \cdot b}}{2}, \quad \bar{\omega} \approx \frac{a \cdot b}{4}.$$

Поэтому

$$\frac{\sigma_1}{\sigma} \approx \frac{\delta}{\sqrt{a \cdot b}}. \quad (54)$$

Аналогично можно произвести и оценку касательных напряжений. Сравним, например, максимальные величины касательных напряжений (44), распределенных равномерно по толщине с напряжениями (49), распределенными по параболическому закону.

Предположим, что действует одна сила  $Q_x$ .

Тогда

$$\frac{\tau_{1\text{max}}}{\tau} = \varphi \frac{2}{3} \cdot \frac{\delta^3}{12} \frac{\bar{y}'}{\bar{S}_y}.$$

Принимая

$$\varphi = 1, \quad \bar{y}' \approx 1, \quad \bar{S}_y \approx \frac{F}{2} \cdot \frac{a}{4} \approx \frac{(a+b)a\delta}{8},$$

получаем приближенную оценку

$$\frac{\tau_{1\text{max}}}{\tau} \approx \frac{\delta^2}{2(a+b)a}. \quad (55)$$

Если габаритные размеры одного порядка, то  $a \approx b$  и будем иметь

$$\frac{\tau_{1\text{max}}}{\tau} \approx \frac{\delta^2}{4a^2}. \quad (56)$$

Как видно из соотношений (52), (53) и (54) нормальные напряжения  $\sigma_1$ , соответствующие продольным изгибающим моментам  $M_1$  в общем случае малы по сравнению с напряжениями  $\sigma$  и ими можно пренебречь, т. е. вести расчет без учета продольных изгибающих моментов  $M_1$ . Учитывать их, видимо, нужно при расчете сильно вытянутых сечений, у которых один из габаритных размеров мал, а толщина оболочки значительна. Сюда относятся, например, сечения тонких крыльев с толстой обшивкой.

Все формулы получены в произвольно расположенных осях координат, поэтому ими удобно пользоваться при расчете несимметричных сечений. Если же сечение имеет геометрическую и упругую симметрию, то совместив одну из осей, например  $y$ , с плоскостью симметрии, получим значительное упрощение формул, т. к. при этом  $I_{xy} = 0$ ,  $\kappa = 1$ ,  $x_T = 0$ ,  $x_D = 0$  и т. д.

В заключение отметим, что все формулы могут быть использованы для расчета конструкций как замкнутого, так и многозамкнутого профиля. При этом все характеристики, связанные с законом секториальных площадей, следует положить равными нулю. Касательные напряжения по формуле (42) или (44) определять в сечении с разрезами в каждом замкнутом контуре, а потоки в разрезах  $q_{oi}$  находить, как обычно, из уравнения моментов и уравнений циркуляции.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. З. В л а с о в. Тонкостенные упругие стержни. Физматгиз. 1959.
2. В. И. К л и м о в. Расчет открытых оболочек типа авиаконструкций, Оборонгиз, 1957.
3. В. И. К л и м о в. Расчет тонкостенных конических стержней открытого профиля. Сборник «Прочность авиационных конструкций», Труды МАИ, вып. 130, Оборонгиз, 1960.

