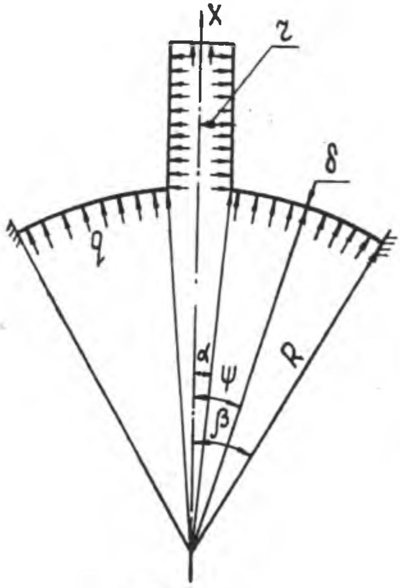
КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С. П. КОРОЛЕВА
Труды, выпуск XXXIX, 1968 г.
Вопросы прочности элементов авиационных конструкций

Б. А. ГОРЛАЧ

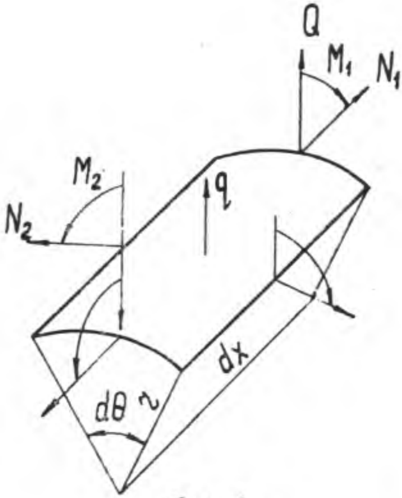
РАСЧЕТ ПРОЧНОСТИ СОЕДИНЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПАТРУБКА С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

В статье приводится метод расчета соединения сферической оболочки с цилиндрическим патрубком (непосредственно или через переходное жесткое кольцо) с учетом пластических деформаций (фиг. 1, 2).

1. Запишем исходное дифференциальное уравнение упруго-



Фиг. 1.



Фиг. 2.

пластического изгиба цилиндрической оболочки при нагружении равномерно-распределенным давлением q [2]:

$$\varepsilon_2^{\mathrm{IV}} + 9m^2\varepsilon_2 = -6m^3\left(\frac{1}{2}\alpha - \beta + \eta''\right) + \frac{27m^3}{4E}q. \tag{1}$$

Здесь ε_2 — окружная деформация; E — модуль упругости, $m = \frac{r}{\delta}$ (r — радиус срединной поверхности цилиндрической оболочки, δ — ее толщина). Функции α, β и η определяются по формулам (3). Штрих означает производную по $\xi = \frac{x}{r}$.

Нелинейное дифференциальное уравнение (1) решается методом последовательных приближений (методом упругих решений А. А. Ильюшина). Если оболочка достаточно длинная, то для n-ного приближения решение уравнения будет иметь вид: $(k = \sqrt{3m/2})$

$$\varepsilon_2^{(n)} = e^{-k\xi}\left[A^{(n)}\cos k\xi + B^{(n)}\sin k\xi\right] + \frac{3m}{4E}q + \varepsilon_{2p}^{(n)},$$

где $\varepsilon_{2p}^{(n)}$ — функция, удовлетворяющая уравнению:

$$\varepsilon_{2p}^{(n)\,\mathrm{IV}} + 9m^2\varepsilon_{2p}^{(n)} = 6m^3(\alpha - \beta + 2\eta'')^{(n-1)}. \tag{2}$$

После переноса слагаемого $9m^2\varepsilon_{2p}^{(n)}$ в правую часть этого уравнения и замены в нем неизвестной функции $\varepsilon_{2p}^{(n)}$ на полученную в $(n-1)$-м приближении функцию $\varepsilon_{2p}^{(n-1)}$ (причем, $\varepsilon_{2p}^{(0)} = 0$) квадратурами легко отыскать $\varepsilon_{2p}^{(n)}$ и ее производные:

$$\varepsilon_{2p}^{(n)} = \int_{\xi_0}^{\xi}\int_{\xi_0}^{\xi}\left[\int_{\xi_0}^{\xi}\int_{\xi_0}^{\xi} G^{(n)}\,d\xi\,d\xi - 12m^3\eta^{(n-1)}\right]d\xi\,d\xi,$$

$$G^{(n)} = 9m^2\left[\frac{2}{3}m(2\beta - \alpha)^{(n-1)} - \varepsilon_{2p}^{(n-1)}\right].$$

Здесь ξ_0 — координата свободного конца цилиндрической оболочки. Постоянные интегрирования $A^{(n)}$ и $B^{(n)}$ определяются из граничных условий при $\xi = 0$.

Зная $\varepsilon_2^{(n)}$, можно определить деформации, усилия и моменты в n-ном приближении

$$\varepsilon_1^{(n)} = \frac{1}{2}\varepsilon_2^{(n)} + m\alpha^{(n-1)} + \frac{3m}{8E}q, \quad \varkappa_1^{(n)} = -\frac{1}{r}\varepsilon_2^{(n)''},$$

$$\varepsilon_2^{(n)''} = 2k^2 e^{-k\xi}\left[A^{(n)}\sin k\xi - B^{(n)}\cos k\xi\right] + \varepsilon_{2p}^{(n)''},$$

$$\vartheta^{(n)} = ke^{-k\xi}\left[A^{(n)}(\cos k\xi + \sin k\xi) + B^{(n)}(\sin k\xi - \cos k\xi)\right] - \varepsilon_{2p}^{(n)'},$$

$$N_2^{(n)} = \frac{4}{3}E\delta\left[\varepsilon_2^{(n)} + \frac{1}{2}\varepsilon_1^{(n)} - m\beta^{(n-1)}\right],$$

$$M_1^{(n)} = \frac{1}{9}E\delta^3\left[\varkappa_1^{(n)} - \frac{12m^3}{r}\eta^{(n-1)}\right],$$

$$M_2^{(n)} = \frac{1}{9} E\delta^3 \left[\frac{1}{2} \varkappa_1^{(n)} - \frac{12m^3}{r} \Theta^{(n-1)} \right],$$

$$Q^{(n)} = \frac{E\delta^3}{9r^2} \left\{ 2k^3 e^{-k\xi} \left[(A^{(n)} - B^{(n)}) \sin k\xi - (A^{(n)} + B^{(n)}) \cos k\xi \right] - \int_{\xi_0}^{\xi} G^{(n)} d\xi \right\}$$

Кроме того, в любом приближении:

$$N_1 = \frac{r}{2} q.$$

Нормальные напряжения будут при этом равны:

$$\sigma_1^{(n)}\left(\pm \frac{\delta}{2}\right) = \frac{4}{3} E \left[1 - \omega^{(n-1)} \left(\pm \frac{\delta}{2}\right) \right] \left[\varepsilon_1^{(n)} + \frac{1}{2} \varepsilon_2^{(n)} \mp \frac{1}{2m} \varepsilon_2^{(n)''} \right],$$

$$\sigma_2^{(n)}\left(\pm \frac{\delta}{2}\right) = \frac{4}{3} E \left[1 - \omega^{(n-1)} \left(\pm \frac{\delta}{2}\right) \right] \left[\varepsilon_2^{(n)} + \frac{1}{2} \varepsilon_1^{(n)} \mp \frac{1}{4m} \varepsilon_2^{(n)''} \right],$$

причем [1]:

$$\omega^{(n)} = \left(1 - \frac{1}{E} \frac{d\sigma_i^{(n)}}{de_i} \right) \left(1 - \frac{e_\text{т}}{e_i^{(n)}} \right).$$

Здесь:
$e_\text{т}$ — деформации, соответствующие пределу текучести,
$e_i^{(n)}$ — интенсивность деформаций:

$$e_i^{(n)} = \sqrt{\gamma_0^{(n)} + \gamma_1^{(n)} t + \gamma_2^{(n)} t^2}, \quad t = \frac{z}{\delta/2};$$

$$\gamma_0^{(n)} = \frac{4}{3} \left[\varepsilon_1^{(n)2} + \varepsilon_1^{(n)} \varepsilon_2^{(n)} + \varepsilon_2^{(n)2} \right], \quad \gamma_1^{(n)} = \frac{4}{3m} \left[\varepsilon_1^{(n)} + \frac{1}{2} \varepsilon_2^{(n)} \right] \varepsilon_2^{(n)''},$$

$$\gamma_2^{(n)} = \frac{1}{3m^2} \left(\varepsilon_2^{(n)''} \right)^2, \quad \mu_\kappa^{(n)} = \int_{-1}^{1} \omega^{(n)} t^k dt, \quad \kappa = 0, 1, 2.$$

z — расстояние, отсчитываемое от срединной поверхности оболочки в направлении внешней нормали.

Вычислив затем:

$$\begin{aligned}
\alpha^{(n)} &= \frac{1}{2m} \left[\mu_0^{(n)} \left(\varepsilon_1^{(n)} + \frac{1}{2} \varepsilon_2^{(n)} \right) - \frac{\mu_1^{(n)}}{2m} \varepsilon_2^{(n)''} \right], \\
\beta^{(n)} &= \frac{1}{2m} \left[\mu_0^{(n)} \left(\varepsilon_2^{(n)} + \frac{1}{2} \varepsilon_1^{(n)} \right) - \frac{\mu_1^{(n)}}{4m} \varepsilon_2^{(n)''} \right], \\
\eta^{(n)} &= \frac{1}{4m} \left[\mu_1^{(n)} \left(\varepsilon_1^{(n)} + \frac{1}{2} \varepsilon_2^{(n)} \right) - \frac{\mu_2^{(n)}}{2m} \varepsilon_2^{(n)''} \right], \\
\Theta^{(n)} &= \frac{1}{4m} \left[\mu_1^{(n)} \left(\varepsilon_2^{(n)} + \frac{1}{2} \varepsilon_1^{(n)} \right) - \frac{\mu_2^{(n)}}{4m} \varepsilon_2^{(n)''} \right],
\end{aligned} \qquad (3)$$

можно перейти к вычислению $\varepsilon_2^{(n+1)}$ и других величин в $(n+1)$-м приближении.

2. При расчете соединения непологой, достаточно «длинной» и тонкой сферической оболочки с цилиндрическим патрубком можно пренебречь влиянием несопрягаемых краев оболочек на напряженное состояние у места стыка. Тогда решение уравнений упруго-пластического изгиба сферической оболочки* для n-ного приближения будет иметь вид:

$$\varepsilon^{(n)} = \gamma \left(C_2^{(n)} p_2 + D_2^{(n)} q_2 \right) + \frac{m}{2E} q + \varepsilon_p^{(n)},$$

$$\varkappa^{(n)} = -2\gamma\lambda \left(C_2^{(n)} q_2 - D_2^{(n)} p_2 \right) + \varkappa_p^{(n)},$$

$$\zeta^{(n)} = -3\gamma \left(C_2^{(n)} r_2 + D_2^{(n)} s_2 \right) + \zeta_p^{(n)},$$

$$\tau^{(n)} = -2\gamma\lambda \left(C_2^{(n)} s_2 - D_2^{(n)} r_2 \right) + \tau_p^{(n)}.$$

Постоянные интегрирования $C_2^{(n)}$, $D_2^{(n)}$ определяются из условий при $\psi = \alpha$.

3. Граничные условия в месте соединения сферы с цилиндрическим патрубком запишутся следующим образом ($\xi = 0$, $\psi = \alpha$).

Непосредственное соединение:

$$1.\ M_{1ц}^{(n)} = M_{1с}^{(n)}, \qquad 3.\ \vartheta_ц^{(n)} + \vartheta_с^{(n)} = 0,$$

$$2.\ Q_ц^{(n)} + H_с^{(n)} = 0, \qquad 4.\ \varepsilon_{2ц}^{(n)} = \varepsilon_{2с}^{(n)};$$

Соединение через жесткое кольцо:

$$\vartheta_ц^{(n)} = \vartheta_с^{(n)} = 0, \quad \varepsilon_{2ц}^{(n)} = \varepsilon_{2с}^{(n)} = 0.$$

Распорное усилие на сферической оболочке:

$$H^{(n)} = \frac{1}{\cos\alpha} \left(N_1^{(n)} - \frac{R \sin^2\alpha}{2} q \right).$$

Расписав граничные условия, получим 4 линейных алгебраических уравнения относительно неизвестных $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, $C_2^{(n)}$ и $D_2^{(n)}$. Определив их, можно вычислить все интересующие нас величины в n-ом приближении.

На ЭВМ «Урал-2» были проведены расчеты рассматриваемого сочленения с параметрами $\delta_ц = \delta_с = 1$ *мм*, $R = 500$ *мм*, $\alpha = 5°$, выполненного из материала, имеющего $E = 2{,}1 \cdot 10^4$ кг/мм², $\frac{d\sigma_i}{d e_i} = E' = 1{,}07 \cdot 10^3$ *кг/мм²*, $e_т = 2{,}45 \cdot 10^{-3}$.

Интегрирование проводилось от свободных краев оболочек к стыку. Шаг интегрирования был принят следующим. Для сферы $\Delta\psi = 1°$ при $8° \leqslant \psi \leqslant 30°$ ($\psi = 30°$ — начало интегрирования) и далее $\Delta\psi = 15'$ от $8°$ до $\alpha = 5°$ (зона ожидаемых пластических деформаций). Для цилиндра аналогично $\Delta\xi = 2 \cdot 10^{-2}$ от начала интегрирования $\xi_0 = 2 \cdot 10^{-1}$ до $\xi = 6 \cdot 10^{-2}$ и $\Delta\xi = 4 \cdot 10^{-3}$ при $0 \leqslant \xi \leqslant 6 \cdot 10^{-2}$.

* И. С. Ахмедьянов. Малые упруго-пластические деформации сферической оболочки при осесимметричном нагружении (Помещена в настоящем сборнике).

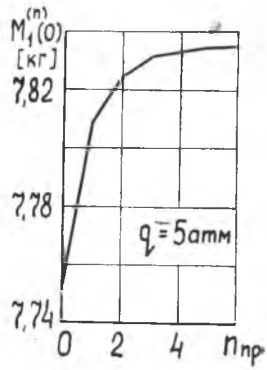
Таблица 1

q	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5
n	0	6	21	33	∞

Таблица 2

q	12	14	16	17	18	18,8	19
n	0	3	12	19	29	62	∞

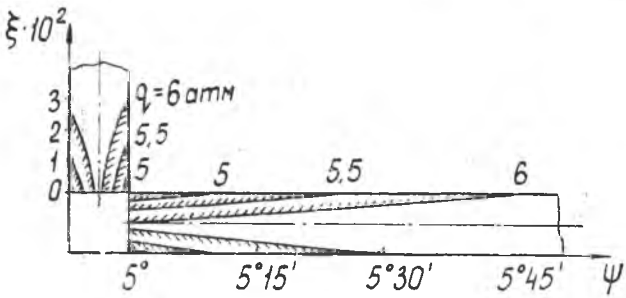
На фиг. 3—7 и в табл. 1 приведены результаты расчета сочленения оболочки без кольца. Сходимость процесса для $q = 5$ *атм* показана на фиг. 3. На вычисление одного приближения затрачивалось от 5 до 30 *сек.* машинного времени в зависимости от величины зон пластических деформаций (фиг. 4).



Фиг. 3.

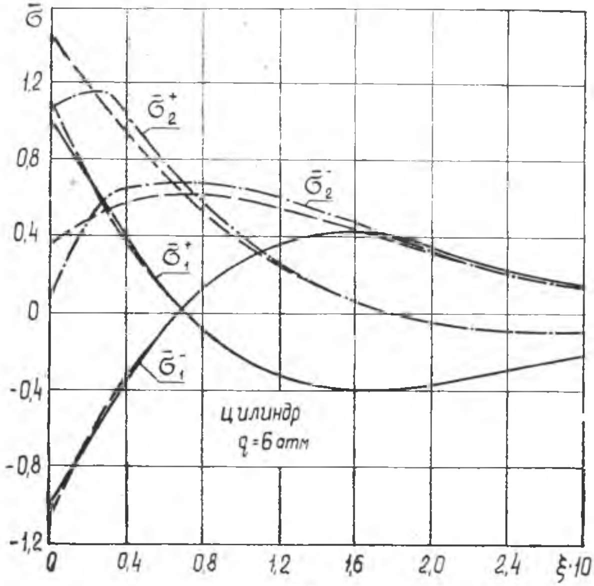
Как видно из табл. 1, сходимость процесса последовательных приближений резко ухудшается с ростом нагрузки и расходится при $q = 6{,}5$ *атм.*

На фиг. 5 показано поведение моментов $m_1 = \frac{M_1}{M_т}$ и нормальных напряжений



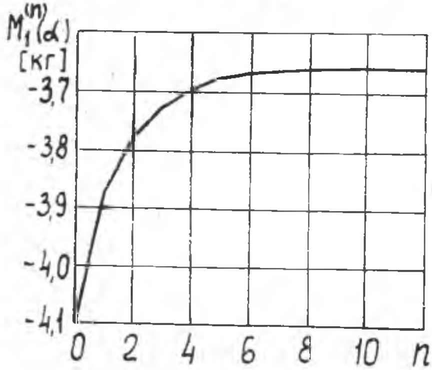
Фиг. 4.

$\bar{\sigma}_1^+ = \frac{\sigma_1\left(+\frac{\delta}{2}\right)}{\sigma_т}$ в месте соединения оболочек при увеличении нагрузки. Здесь $M_т = \frac{\sigma_т \delta^2}{6}$, $\sigma_т = e_т E$.



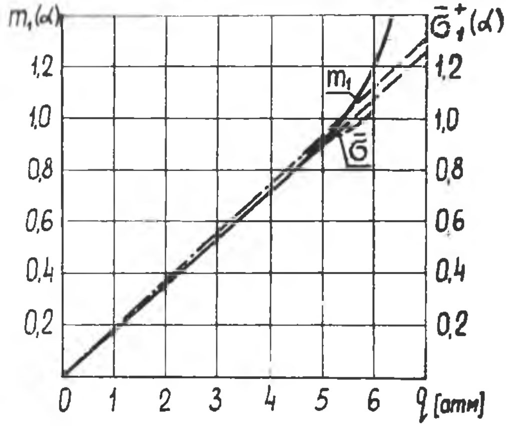
$\bar{\sigma}$
1,2
0,8
0,4
0
-0,4
-0,8
-1,2
$\bar{\sigma}_2^+$
$\bar{\sigma}_2^-$
$\bar{\sigma}_1^+$
$\bar{\sigma}_1^-$
цилиндр
q = 6 атм
0
0,4
0,8
1,2
1,6
2,0
2,4
$\xi \cdot 10$

Фиг. 7.

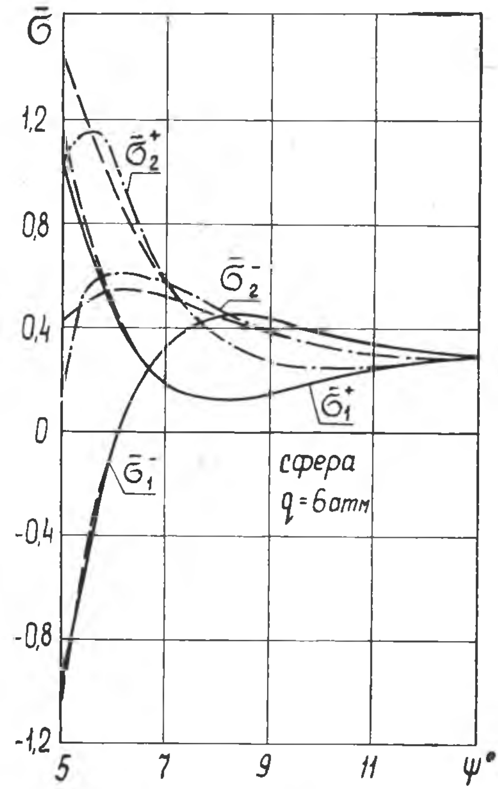


$M_1^{(n)}(\alpha)$
[кг]
-3,7
-3,8
-3,9
-4,0
-4,1
0
2
4
6
8
10
n

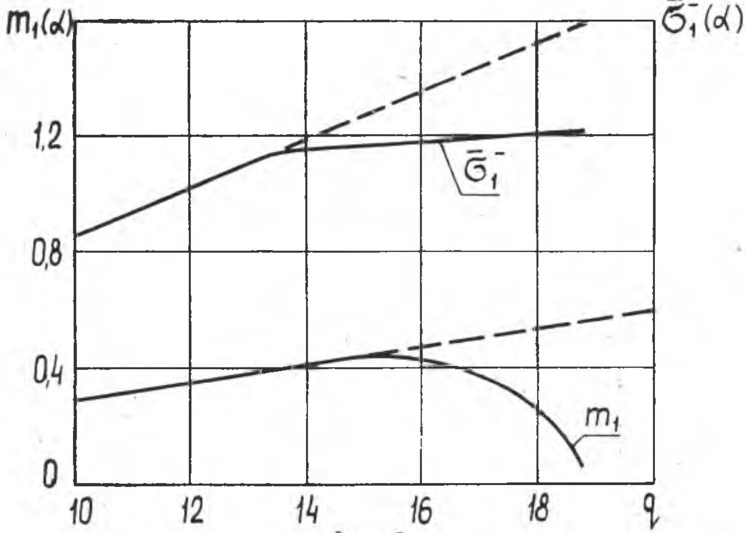
Фиг. 8.


$m_1(\alpha)$
$\bar{\sigma}_1^+(\alpha)$
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
m_1
$\bar{\sigma}$
0
1
2
3
4
5
6
q [атм]

Фиг. 5.

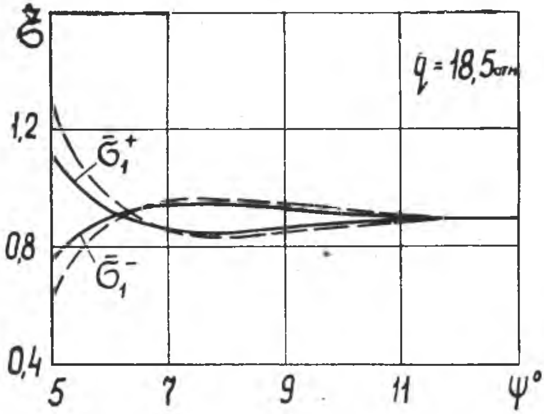

$\bar{\sigma}$
1,2
0,8
0,4
0
-0,4
-0,8
-1,2
$\bar{\sigma}_2^+$
$\bar{\sigma}_2^-$
$\bar{\sigma}_1^+$
$\bar{\sigma}_1^-$
сфера
q = 6атм
5
7
9
11
$\psi°$

Фиг. 6.



$m_1(\alpha)$
$\bar{\sigma}_1^-(\alpha)$
1,2
0,8
0,4
0
$\bar{\sigma}_1^-$
m_1
10
12
14
16
18
q

Фиг. 9.



$\bar{\sigma}$
$q = 18,5$ атм
1,2
0,8
0,4
$\bar{\sigma}_1^+$
$\bar{\sigma}_1^-$
5
7
9
11
$\psi°$

Фиг. 10.

Рост моментов по сравнению с линейной теорией можно объяснить быстрым ростом кривизны с развитием пластических деформаций.

На фиг. 6 и 7 показано перераспределение напряжений в сферической и цилиндрической оболочках при появлении пластических деформаций.

На графиках 8, 9, 10 и в таблице 2 приведены результаты расчета соединения сферической оболочки с цилиндрическим патрубком при наличии жесткого переходного кольца. График на фиг. 8 построен для $q = 16$ *атм*.

Как видно из графиков, постановка жесткого кольца в месте стыка оболочек резко снижает максимальные напряжения. Пластические деформации в таком соединении появляются в сферической оболочке при $q = 14$ *атм*. При давлении 19 *атм* процесс итераций расходится.

В цилиндрической оболочке при этих давлениях пластические деформации не возникают.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Ильюшин. Пластичность. Гостехиздат, 1948.

2. И. С. Ахмедьянов. Расчет малых упруго-пластических деформаций цилиндрической оболочки, нагруженной внутренним давлением. Тезисы докладов научно-технической конференции КуАИ, Куйбышев, 1967 г.