ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
Межвузовский сборник, вып. 2, 1975

М.Б.Вахитов, Л.М.Конюхова

РАСЧЕТ КРЫЛЬЕВ БОЛЬШОЙ КОНУСНОСТИ

В последние годы теория расчета тонкостенных конструкций, разработанная в [1], получила практическое применение для реальных конструкций в варианте численной методики [2], основанной на аппарате интегрирующих матриц [3]. По сравнению с методом конечных элементов (МКЭ) эта методика обладает меньшей трудоемкостью расчета благодаря использованию гипотезы неизменяемости формы поперечного сечения в процессе деформации. Именно поэтому в рамках этой методики удалось реализовать такие сложные задачи, как расчет крыла за пределом пропорциональности [4], расчет крыла с учетом изменения присоединенной площади обшивки в зависимости от уровня получаемых напряжений [5] и др. Более того, на базе теории [1] разработана методика расчета крыльев [6], в которой учитывается и деформация нервюр, т.е. не используется гипотеза неизменяемости формы поперечного сечения крыла в процессе деформации. При этом принимается дискретно-континуальная расчетная схема крыла, являющаяся обобщением дискретной, лежащей в основе МКЭ.

В теории [1] используется допущение о том, что углы между продольными ребрами (поясами лонжеронов, стрингерами) и осью $0z_0$, направленной по размаху (рис. 1), малы. Для современных крыльев малого удлинения, имеющих стреловидность и большое сужение, подобное допущение может быть принято не для всех ребер. В настоящей работе теория [1] обобщается на случай крыла с продольными ребрами, имеющими произвольные углы с осью $0z_0$. Следует отметить, что в [7,8] предпринимались попытки такого обобщения, но лишь для конструкций частного вида. Здесь же рассматривается конструкция крыла общего вида в предположении, что ребра прямолинейны, а лонжероны имеют небольшой перепад по высоте. В отношении силовой работы элементов

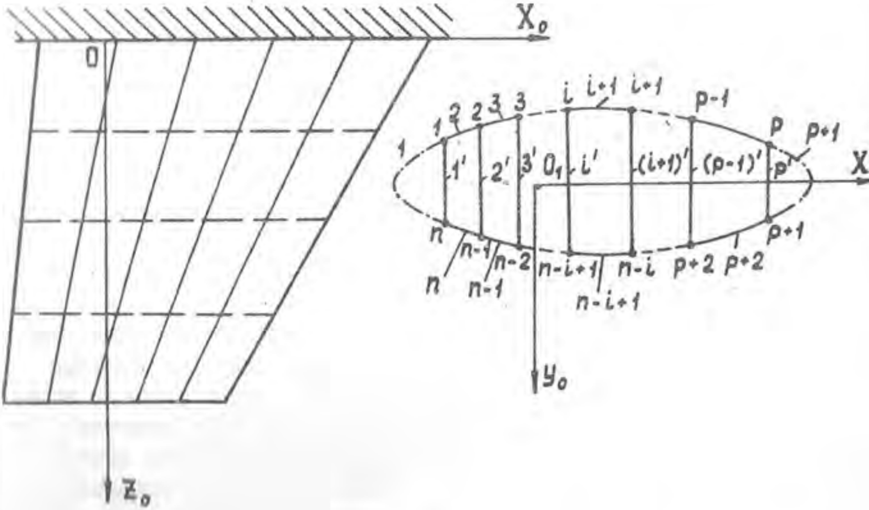

X₀
0
Z₀
O₁
y₀
i
i+1
p-1
p
p+1
1'
2'
3'
i'
(i+1)'
(p-1)'
p'
n
n-1
n-2
n-i+1
n-i
p+2

Рис. 1

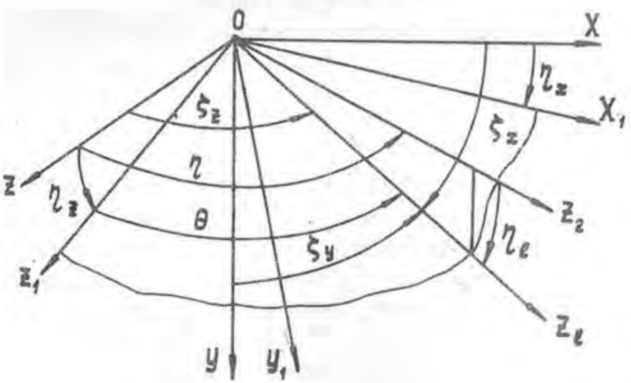

0
X
X₁
Z
Z₁
Z₂
Zₑ
y
y₁
θ
η

Рис.2

конструкции приняты те же допущения, что и в [I]: продольные ребра работают только на нормальные, а обшивка – только на касательные напряжения.

В дальнейшем используются следующие обозначения: $x_0y_0z_0$ – общая система координат для крыла с началом в произвольной точке корневого сечения (рис.I); xyz – местная система координат, параллельная $x_0y_0z_0$, с началом в рассматриваемой точке поперечного сечения; $x_1y_1z_1$ – местная система координат, плоскость x_1Oz_1 которой касательна к поверхности крыла в рассматриваемой точке, а ось Ox_1 касательна к контуру поперечного сечения; Oz_e – ось, проведенная вдоль образующей оболочки; Oz_2 – проекция оси Oz_e на плоскость xOz; ζ_x, ζ_y, ζ_z, θ – углы наклона ребра к осям Ox, Oy, Oz, Oz_1 (рис. 2); η_x, η_z, η_e – углы между осями Ox и Ox_1, Oz и Oz_1, Oz_e и Oz_2 соответственно; η – угол между осями Oz и Oz_2 (между плоскостью стенки лонжерона и осью Oz); $f=f(z)$ – перемещение точки поперечного сечения вдоль образующей; $u=u(z)$, $v=v(z)$ – компоненты перемещения точки поперечного сечения вдоль осей Ox_1 и Oz_1.

Остальные обозначения элементов поперечного сечения, нумерация ребер, участков обшивки и стенок лонжеронов, матричные обозначения принимаем такими же, как и в [6].

Воспользуемся известным соотношением теории упругости

$$\frac{\partial u}{\partial z_1}+\frac{\partial v}{\partial x_1}=\frac{q}{G\delta} \tag{I}$$

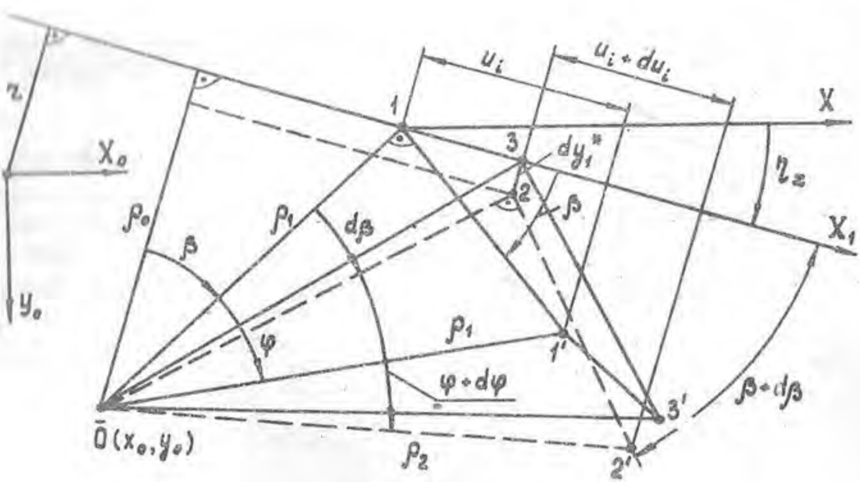
Вследствие принятой гипотезы неизменяемости формы поперечного сечения перемещение u можно найти, рассматривая вращение сечения как жесткого диска относительно мгновенного центра $\bar{O}$ (рис.3). Для определения производной $\frac{\partial u}{\partial z_1}$ рассматриваем, как и в [I], относительное перемещение двух бесконечно близких сечений. Учитывая, что $dz_1=\frac{dz}{\cos\eta_z}$, запишем [9]

$$\frac{\partial u}{\partial z_1}=\rho_0\xi\cos\eta_z, \tag{2}$$

где ξ – относительный угол закручивания; ρ_0 – длина перпендикуляра к Ox_1 из $\bar{O}$ (рис. 3).

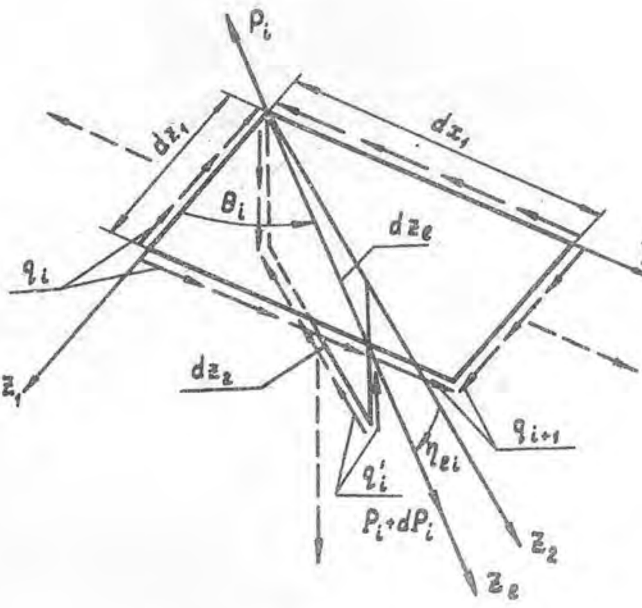
Далее в (2) используем формулу [9] перехода от мгновенного центра $\bar{O}$ к началу общей системы координат

$$\frac{\partial u}{\partial z_1}=(r\xi-\alpha\cos\eta_x-\beta\sin\eta_x)\cos\eta_z, \tag{3}$$



u_i
$u_i + du_i$
X
1
3
dy_1''
2
η_z
X_1
z
O_1
X_o
y_o
ρ_o
ρ_1
$d\beta$
β
β
φ
ρ_1
1'
$\varphi + d\varphi$
3'
$\beta + d\beta$
$\bar{O}(x_o, y_o)$
ρ_2
2'

Рис.3



P_i
dz_1
dx_1
θ_i
dz_e
X_1
q_i
dz_2
z_1
q_{i+1}
η_{ei}
q_i'
$P_i + dP_i$
z_2
z_e

Рис.4

где

$$\alpha = -\xi y_0, \quad \beta = \xi x_0,$$

r - длина перпендикуляра к Ox_1 из точки пересечения оси Oz_0 с плоскостью поперечного сечения; x_0, y_0 - координаты мгновенного центра.

Подставим (3) в (I) и, интегрируя по x_1 в пределах i -ой панели обшивки (стенки), получим

$$v_{i-1} - v_i = \frac{q_i s_i}{G_i \delta_i} - [2w_i \xi - \alpha(x_i - x_{i-1}) - \beta(y_i - y_{i-1})]\cos\bar{\eta}_{zi}, \quad (4)$$

где $w_i = \frac{1}{2}\int_{s_i} r\,dx_1$ - секториальная площадь, соответствующая дуге контура S_i и мгновенному центру поворота сечения O_1 (рис.3); v_{i-1}, v_i - перемещения ребер, окаймляющих i -ую панель обшивки (стенки).

При интегрировании слагаемых, содержащих $\cos\eta_z$, в (4) применена теорема о среднем, т.к. в пределах одной панели $\cos\eta_z$ меняется слабо[ж)].

Из (4) найдем

$$q_i = b_i\{v_i - v_{i-1} + [2w_i\xi - \alpha(x_i - x_{i-1}) - \beta(y_i - y_{i-1})]\cos\bar{\eta}_{zi}\} \quad (5)$$

Следуя [8], запишем (5) в матричной форме:

$$\{q\} = \ulcorner b \lrcorner(-M_n^T\{v\} + \ulcorner\eta\lrcorner[M]^T\{\bar{z}\}, \quad (6)$$

где $\ulcorner b \lrcorner$, $\ulcorner\eta\lrcorner$ - диагональные матрицы порядка m из элементов $b_i = \frac{G_i\delta_i}{S_i}$ и $\cos\bar{\eta}_{zi}$ соответственно; $\{q\}$, $\{v\}$ - столбцы порядка m и n соответствующих величин для панелей (стенок) и ребер; M_n - числовая матрица порядка $n \times m$, состоящая из нулей и единиц [6];

$$[M] = \begin{bmatrix} \llcorner 2w \lrcorner \\ \llcorner x \lrcorner \cdot M_n \\ \llcorner y \lrcorner \cdot M_n \end{bmatrix}, \quad \{\bar{z}\} = \begin{Bmatrix} \xi \\ \alpha \\ \beta \end{Bmatrix}$$

ж) Для реальных конструкций можно принять $\cos\bar{\eta}_{zi}$ как среднее арифметическое между $\cos\eta_{zi-1}$ и $\cos\eta_{zi}$, относящимися к окантовывающим i -ую панель продольным ребрам. Это эквивалентно замене крыла складчатой конструкцией, как это принято в МКЭ.

$\lfloor 2w \rfloor$, $\lfloor x \rfloor$, $\lfloor y \rfloor$ - матрицы-строки, состоящие соответственно из элементов $2w_i$, $x_i - x_{i-1}$, $y_i - y_{i-1}$.

Установим зависимость между внутренними усилиями в элементах конструкции. Для этого рассмотрим равновесие элемента конструкции, включающего обшивку, продольное ребро и, для общности, стенку лонжерона (рис. 4)*). Записывая условие равновесия элемента, имеем

$$-q_i dz_{ei} \cos\theta_i + q_{i+1} dz_{ei} \cos\theta_i - q'_i dz_{ei} \cos\theta_i + dP_i \cos\theta_i = 0. \quad (7)$$

В связи с малым перепадом высот лонжерона здесь принято $\cos\eta_{ei} \approx 1$. Из (7) имеем

$$p_i = -\frac{dP_i}{dz_{ei}} = q_{i+1} - (q_i + q'_i). \quad (8)$$

В матричной форме (8) запишется так [6]:

$$\{p\} = M_n \{q\}, \quad (9)$$

где $\{p\}$ - столбец порядка n.

Неизвестным в уравнениях (6) и (9) является столбец $\{\bar{\varepsilon}\}$ - общие относительные деформации крыла. Запишем их как функцию перемещения $\{v\}$ из уравнений равновесия. Благодаря (9) система шести уравнений равновесия сил в сечении сводится к трем (см.[6]):

$$[M]\{q\} - [N]\{P\} - \{m\} = 0, \quad (10)$$

где $\{P\}$ - столбец порядка n осевых усилий в продольных ребрах;

$$[N] = \begin{bmatrix} \lfloor y \cos\zeta_x - x\cos\zeta_y \rfloor \\ \lfloor \cos\zeta_x \rfloor \\ \lfloor \cos\zeta_y \rfloor \end{bmatrix}, \quad \{m\} = \begin{Bmatrix} M_z \\ -Q_x \\ -Q_y \end{Bmatrix}$$

*) Элемент вырезан плоскостями, проходящими через грани участка обшивки dx_1 и dz_1. Две из них параллельны плоскости поперечного сечения, две другие - им перпендикулярны. Кроме того, участок стенки dz_2 отсекается от остальной части крыла плоскостью, перпендикулярной оси Oy. При таком выборе плоскостей, отсекающих элемент, соблюдается условие, необходимое для использования закона парности касательных напряжений.

Известно, что

$$P_i = E_i F_i \frac{df_i}{dz_{ei}}, \tag{II}$$

где f_i - осевое перемещение точек продольного ребра; z_{ei} - координата, отсчитываемая вдоль ребра.

Установим связь между компонентами перемещения u_i, v_i и f_i (рис. 5). Она получится, если спроектировать u_i и v_i на направление ребра:

$$f_i = v_i \cos\theta_i + u_i \sin\theta_i. \tag{I2}$$

Подставив (I2) в (II), получим

$$P_i = E_i F_i \left(\frac{dv_i}{dz_{ei}} \cos\theta_i + \frac{du_i}{dz_{ei}} \sin\theta_i\right). \tag{I3}$$

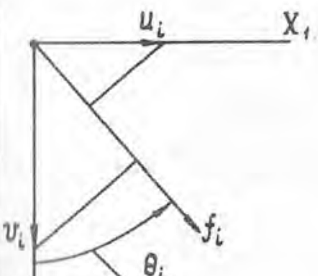


Рис.5

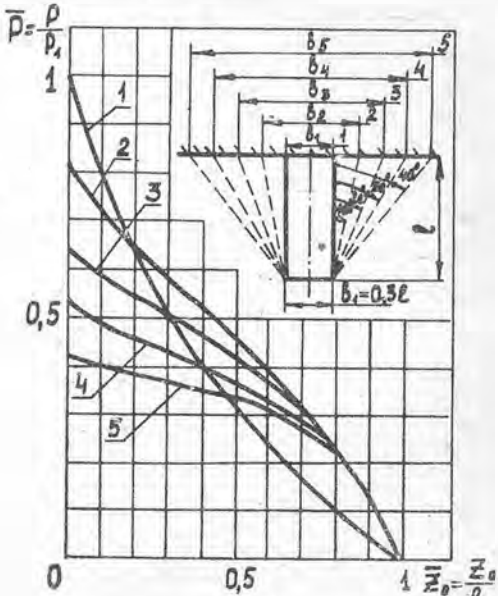


Рис.6

Заметим, что в (II) и (I3) фигурируют обыкновенные производные, так как перемещения точек ребра f_i, u_i, v_i являются функциями одной переменной - координаты z_{ei}.

Запишем $\frac{du_i}{dz_{ei}}$ с учетом гипотезы неизменяемости формы поперечного сечения в процессе деформации[ж)]. Рассматривая проекции элемента ребра (рис. 3) на плоскость поперечного сечения до (1-2) и после (1'-2') деформации, имеем

$$u_i = \rho_1 \varphi \cos\beta = \rho_0 \varphi, \tag{14}$$

$$u_i + du_i = \rho_2(\varphi + d\varphi)\cos(\beta + d\beta) = \rho_0\varphi + \rho_0 d\varphi - \varphi dy_1^* - d\varphi dy_1^*, \tag{15}$$

где dy_1^* – проекция dy_1 на плоскость поперечного сечения.

В (15) можно пренебречь двумя последними членами, как малыми второго порядка, тогда

$$du_i = \rho_0 d\varphi. \tag{16}$$

С учетом того, что $d\varphi = \xi dz$, $dz_{ei} = \frac{dz}{\cos\zeta_{zi}}$, получим

$$\frac{du_i}{dz_{ei}} = \rho_0 \xi \cos\zeta_{zi}. \tag{17}$$

Подставим (17) в (13), вторично воспользуемся формулой перехода от ρ_0, отсчитываемого от мгновенного центра, к τ, отсчитываемого от начала общей системы координат [12], и найдем

$$P_i = E_i F_i \cos\zeta_{zi}\left[\frac{dv_i}{dz}\cos\theta_i + (\tau\xi - \alpha\cos\eta_x - \beta\sin\eta_x)\sin\theta_i\right], \tag{18}$$

что в матричной форме запишется так:

$$\{P\} = \lceil c_1 \rfloor\{v'\} + \lceil c_2 \rfloor [S]^T\{\bar{z}\}, \tag{19}$$

где $\lceil c_1 \rfloor$, $\lceil c_2 \rfloor$ – диагональные матрицы порядка n значений $c_{1i} = E_i F_i \cos\zeta_{zi} \cos\theta_i$ и $c_{2i} = E_i F_i \cos\zeta_{zi} \sin\theta_i$;

$$[S] = \begin{bmatrix} \lfloor \tau \rfloor \\ \lfloor -\cos\eta_x \rfloor \\ \lfloor -\sin\eta_x \rfloor \end{bmatrix}.$$

Для получения разрешающего уравнения решаем совместно (6),(9), (10), (19). Исключим $\{\bar{z}\}$ и $\{q\}$ из этих уравнений и получим $\{p\}$ и $\{P\}$ через $\{v'\}$, $\{v\}$ и внешнюю нагрузку $\{m\}$. Далее, используя связь между P_i и $p_i = -\frac{dP_i}{dz_{ei}}$, получим оконча-

---

ж) Использование формулы (3) здесь неправомерно, т.к. она получена для поля точек, расположенного на поверхности оболочки, для которых $u(x_1, z_1)$ – функция двух переменных.

тельное разрешающее уравнение для определения $\{v'\}$:

$$-([A_4]\{v'\}+[A_5]\{v\}+[A_6]\{m\})'=[A_1]\{v'\}+[A_2]\{v\}+[A_3]\{m\}, \quad (20)$$

где $[A_\nu]$ - функциональные матрицы, получающиеся в результате решения системы уравнений ($\nu = 1, \ldots, 6$)[ж)].

Таким образом, получено матричное дифференциальное уравнение (20) относительно перемещений тонкостенной конструкции с произвольной конусностью. В частном случае малой конусности оно принимает вид:

$$-[A_4]\{v''\}=[A_1]\{v'\}+[A_2]\{v\}+[A_3]\{m\}, \quad (21)$$

что является матричной формой уравнений (12_4) работы [1].

Для апробирования разработанной методики рассмотрена серия крыльев, полученных из четырехпоясного кессона постоянного поперечного сечения в виде прямоугольника путем увеличения корневой хорды. Они имеют угол конусности в плане от 0° до 40° (рис.6). Расчет производился от действия крутящего момента, приложенного к свободному торцу.

Как и следовало ожидать, с увеличением угла конусности осевое усилие в заделке уменьшается вследствие роста жесткости кессона на кручение. В то же время нарастание осевого усилия от нагруженного торца происходит более резко, чем для кессона постоянного сечения, так как в отличие от последнего стеснение депланации происходит здесь не только в заделке, но и по всей длине в связи с изменением жесткости сечения на кручение.

Литература

1. Одинокое Ю.Г. Напряжения и деформации в тонкостенных конструкциях переменного сечения. Труды КАИ, вып. 20, 1948.
2. Вахитов М.Б., Сафонов А.С. Расчет тонкостенных конструкций с большими вырезами. Труды КАИ, вып. 139, 1971.

ж) В связи с недостатком места они здесь не записаны.

3. Вахитов М.Б. Интегрирующие матрицы - аппарат численного решения дифференциальных уравнений строительной механики. ИВУЗ, "Авиационная техника", № 3, 1966.
4. Вахитов М.Б., Сафонов А.С. К расчету тонкостенного крыла малого удлинения за пределами пропорциональности. ИВУЗ, "Авиационная техника", № 2, 1972.
5. Вахитов М.Б., Сафариев М.С., Сафонов А.С. К расчету прочности тонкостенных конструкций с учетом редуцирования обшивки по уровню действующих напряжений. "Вопросы прочности элементов авиационных конструкций", Межвузовский сборник, вып. I, 1975.
6. Вахитов М.Б., Ларионов И.Г. Теория расчета крыла малого удлинения по дискретно-континуальной расчетной схеме. (Матричное дифференциальное уравнение осевых перемещений). ИВУЗ, "Авиационная техника", № 2, 1975.
7. Соловьев Е.Г. К расчету скошенных тонкостенных лонжеронных конструкций. Труды КуАИ, вып. 2, 1954.
8. Вахитов М.Б. Влияние упругости нервюр на напряжения в кессоне. Труды КАИ, вып. 33-34, 1958.
9. Одиноков Ю.Г. Расчет тонкостенных конструкций типа крыла, фюзеляжа и оперения самолетов. Труды КАИ, вып. I8, 1946.