КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С. П. КОРОЛЕВА
Труды, выпуск XXXIX, 1968 г.
Вопросы прочности элементов авиационных конструкций

В. И. КЛИМОВ

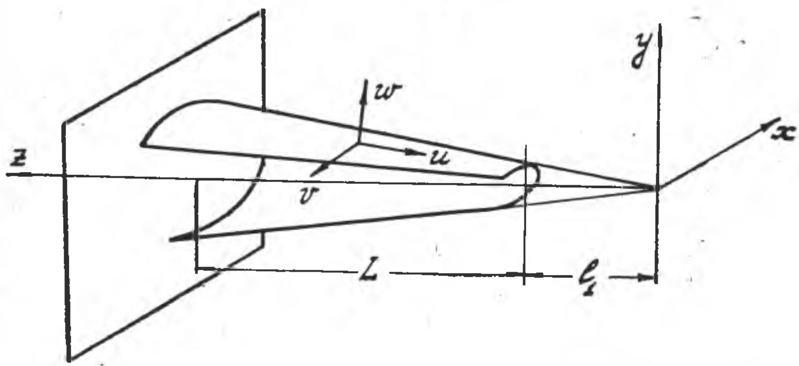
РАСЧЕТ КОНИЧЕСКИХ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ УПРУГОСТИ ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ НАГРЕВЕ

Основные допущения и геометрические зависимости

Рассматриваются конические тонкостенные конструкции открытого профиля в предположении произвольного изменения по сечению и длине толщины, параметров упругости и температуры. Конусность считается малой. Начало осей координат совмещено с вершиной конуса. Ось z направлена перпендикулярно корневому сечению, а оси x, y направлены произвольно.

Если уравнение контура поперечного сечения $z=l$ будет $x=x(s)$, $y=y(s)$, то уравнение срединной поверхности конического стержня (фиг. 1) примет вид:

$$X = \frac{z}{l} x(s),\ Y = \frac{z}{l} y(s),\ Z = z. \tag{1}$$



Фиг. 1.

Коэффициенты первой квадратичной формы будут равны

$$A = 1, \ B = \frac{z}{l} \ . \tag{2}$$

Здесь принимаются те же допущения, что и в теории цилиндрических тонкостенных стержней [1]. Неизменяемость контура ($\varepsilon_2 = 0$, $\varkappa_2 = 0$), отсутствие сдвигов в срединной поверхности ($\gamma_{zs} = 0$) и малость деформаций изгиба в продольном направлении ($\varkappa_1 = 0$).

На основании формул общей теории оболочек получаем

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial z}, \ \varkappa_3 = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{l}{z}\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{v}{R_2}\right), \\ &\gamma_{zs} = \frac{l}{z}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{z}{l}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{l}{z} v\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Перемещения произвольной точки M сечения z (фиг. 2):

$$\xi_{\text{м}} = \xi(z) - Y \cdot \Theta(z), \quad \eta_{\text{м}} = \eta(z) + X \cdot \Theta(z). \tag{4}$$

Тогда перемещения по касательной и нормали к контуру, с учетом (1), выразятся так:

$$\begin{aligned} &v = -\left[\xi(z) - \frac{z}{l} y(s) \cdot \Theta(z)\right] \cdot \sin\beta + \left[\eta(z) + \frac{z}{l} x(s) \cdot \Theta(z)\right] \cdot \cos\beta, \\ &w = \left[\xi(z) - \frac{z}{l} y(s) \cdot \Theta(z)\right] \cdot \cos\beta + \left[\eta(z) + \frac{z}{l} x(s) \cdot \Theta(z)\right] \cdot \sin\beta. \end{aligned} \tag{5}$$

Подставляя эти значения в формулу для деформации кручения и учитывая равенство:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{d\beta}{ds_1} = \frac{l}{z}\frac{d\beta}{ds}, \ \frac{dx}{ds} = x' = -\sin\beta, \ \frac{dy}{ds} = y' = \cos\beta, \tag{6}$$

получим

$$\varkappa_3 = \Theta'(z). \tag{7}$$

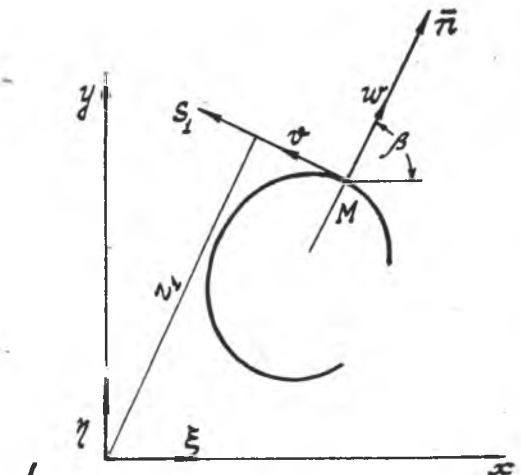
Перемещение по касательной (5) с учетом зависимостей (6) запишем в виде:

$$v = \xi \cdot x' + \eta \cdot y' + \\ + \frac{z}{l} \Theta \cdot r(s), \tag{8}$$

где

$$r(s) = \frac{l}{z} r_1(s_1) = \\ = x \cdot y' - y \cdot x'. \tag{9}$$

На основании допущения об отсутствии сдвигов в срединной поверхности из последней фор-



Фиг. 2.

мулы (3) получаем связь между продольными перемещениями и перемещениями по касательной к контуру:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{z^2}{l^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{l}{z}\cdot v\right).$$

Подставляя сюда значение (8) и интегрируя, получим:

$$u = -\frac{z^2}{l^2}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{l}{z}\xi(z)\cdot x(s) + \frac{l}{z}\eta(z)\cdot y(s) + \Theta(z)\cdot\omega(s)\right] + \zeta(z), \quad (10)$$

где $\omega(s) = \int\limits_0^s r(s)\,ds$ — секториальная площадь.

Упругие деформации:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial z} - \alpha t = -\frac{z}{l}\xi''\cdot x - \frac{z}{l}\eta''\cdot y - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z^2}{l^2}\Theta^2\right)\cdot\omega + \zeta' - \alpha\cdot t, \quad (11)$$

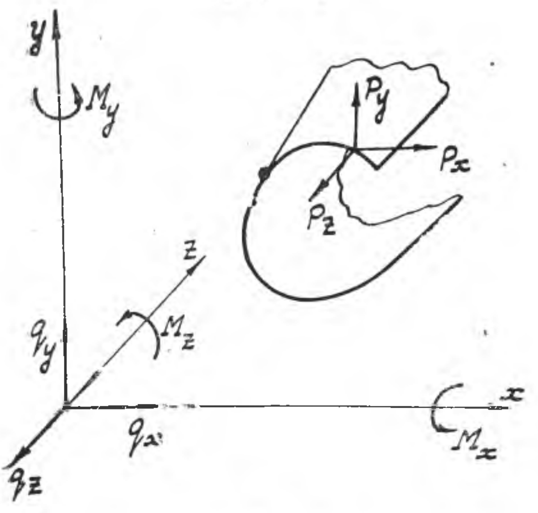
здесь $\alpha = \alpha(z, s)$, $t = t(z, s)$ — коэффициент линейного расширения и температура.

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ

Для получения основных зависимостей используем вариационный принцип Лагранжа.

Потенциальную энергию деформации с учетом принятых допущений представим в виде:

$$U = \int\limits_L \left[E_0 \frac{\varepsilon^2\varphi}{2}\delta\frac{z}{l}\,ds + G_0\oint\frac{\varkappa_3^2\psi\delta^3}{6}\frac{z}{l}\,ds\right]dz, \quad (12)$$



Фиг. 3.

где

$$\varphi(z, s) = \frac{E_1(z, s)}{E_0},$$

$$\psi(z, s) = \frac{G(z, s)}{G_0},$$

$$\delta = \delta(z, s) \quad (13)$$

$$E_1 = \frac{E}{1-\mu^2}, \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)},$$

$$E_0 = \text{const}, \quad G_0 = \text{const}.$$

Учитывая, что поперечную нагрузку (фиг. 3) в соответствии с гипотезой о неизменяемости контура можно приводить к любой статически эквивалентной, а продольную нагрузку нельзя, запишем потенциальную энергию внешних сил в виде:

$$T = -\int\limits_L (q_x\cdot\xi + q_y\cdot\eta + m_z\cdot\Theta + \oint p_z\cdot u_z\, ds_1)\, dz, \tag{14}$$

где

$$u_z = -\frac{z}{l}\xi'\cdot x - \frac{z}{l}\eta'\cdot y - \frac{z^2}{l^2}\Theta'\cdot\omega + \zeta. \tag{15}$$

Поэтому

$$\oint p_z\cdot u_z\, ds_1 = m_y\cdot\xi' - m_x\cdot\eta' - b_p\cdot\Theta' + q_z\cdot\zeta. \tag{16}$$

В соотношениях (14) и (16) учтены следующие зависимости:

$$\left.\begin{aligned}
&q_x = \oint p_x\cdot ds_1 = \oint \frac{z}{l} p_x ds,\quad q_y = \oint p_y ds_1 = \oint \frac{z}{l} p_y ds,\\
&q_z = \oint p_z ds_1 = \oint \frac{z}{l} p_z ds\\
&m_x = \oint p_z\cdot Y ds_1 = \oint \frac{z^2}{l^2} p_z\cdot y\cdot ds,\quad m_y = -\oint p_z\cdot X ds_1 =\\
&= -\oint \frac{z^2}{l^2} p_z\cdot x ds,\\
&m_z = \oint (p_y\cdot X - p_x\cdot Y) ds_1 = \oint \frac{z^2}{l^2}(p_y\cdot x - p_x\cdot y) ds\\
&b_p = \oint p_z\cdot\omega_1\cdot ds_1 = \oint \frac{z^3}{l^3} p_z\cdot\omega\cdot ds.
\end{aligned}\right| \tag{17}$$

Подставляя значения (7) и (11) в формулу (12) и суммируя с выражением (14) на основании (16) получим полную потенциальную энергию системы в виде функционала:

$$Э = U + T = \int\limits_L \Phi(z, \xi; \xi; \xi'; \xi'', \eta, \eta', \eta''; \vartheta', \vartheta''; \zeta, \zeta')\, dz,$$

$$\text{где } \Phi = E_0 \oint \frac{1}{2}\left(-\frac{z}{l}\xi''\cdot x - \frac{z}{l}\eta''\cdot y - \vartheta''\cdot\omega + \zeta' - \alpha\cdot t\right)^2\cdot\frac{z}{l}\varphi\delta ds +$$

$$+ G_0 \oint \frac{l^3}{z^3}\vartheta'^2\frac{\varphi\delta}{6} ds - q_x\cdot\xi - q_y\cdot\eta - q_z\cdot\zeta + m_x\cdot\eta' -$$

$$- m_y\cdot\xi' - M_z\cdot\frac{l^2}{z^2}\vartheta' + b_p\cdot\frac{l^2}{z^2}\vartheta'. \tag{18}$$

Здесь введено обозначение:

$$\vartheta' = \frac{z^2}{l^2}\Theta' \tag{19}$$

и учтено равенство работ, вычисленных следующим образом:

$$\int m_z\Theta dz + \sum M_{zi}\Theta_i = \int M_z\cdot\Theta' dz = \int M_z\frac{l^2}{z^2}\vartheta' dz.$$

Условия стационарности функционала (18):

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} - \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi'}\right) + \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi''}\right) = 0,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} - \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta'}\right) + \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta''}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} - \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta'}\right) = 0,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta'} - \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta''}\right) = 0$$

в развернутом виде будут:

$$\left|-q_x+\frac{dm_y}{dz}\right|+\frac{d^2}{dz^2}\left[E_0\oint\left(-\frac{z}{l}\xi''x-\frac{z}{l}\eta''\cdot y-\vartheta''\cdot\omega+\zeta'-\alpha t\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(-\frac{z^2}{l^2}\,x\varphi\delta\right)ds\right]=0,$$

$$\left|-q_y-\frac{dm_x}{dz}\right|+\frac{d^2}{dz^2}\left[E_0\oint\left(-\frac{z}{l}\xi''\cdot x-\frac{z}{l}\eta''\cdot y-\vartheta''\cdot\omega+\zeta'-\alpha t\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(-\frac{z^2}{l^2}\,y\varphi\delta\right)ds\right]=0, \tag{20}$$

$$\left|-q_z\right|-\frac{d}{dz}\left[E_0\oint\left(-\frac{z}{l}\xi''\cdot x-\frac{z}{l}\eta''\cdot y-\vartheta''\cdot\omega+\zeta'-\alpha t\right)\frac{z}{l}\varphi\delta\,ds\right]=0,$$

$$\left|\frac{l^2}{z^2}b_p-\frac{l^2}{z^2}M_z\right|+\frac{l^3}{z^3}G_0\cdot\vartheta'\oint\frac{\psi\delta^3}{3}ds-\frac{d}{dz}\left[E_0\oint\left(-\frac{z}{l}\xi''\cdot x-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{z}{l}\eta''\cdot y-\vartheta''\cdot\omega+\zeta'-\alpha t\right)\left(-\frac{z}{l}\omega\varphi\delta\right)ds\right]=0 \tag{21}$$

В уравнениях грузовые члены взяты по абсолютной величине с тем, чтобы в дальнейшем взять знаки в соответствии с принятым правилом знаков.

Интегрируя уравнения (20), будем иметь:

$$-M_y+E_0M_{yt}+E_0\cdot\frac{z^2}{l^2}\left(\frac{z}{l}\xi''\cdot I_y+\frac{z}{l}\eta''\cdot I_{xy}+\vartheta''\cdot S_{\omega x}-\zeta'\cdot S_y\right)=0,$$

$$M_x+E_0M_{xt}+E_0\cdot\frac{z^2}{l^2}\left(\frac{z}{l}\xi''\cdot I_{xy}+\frac{z}{l}\eta''\cdot I_x+\vartheta''\cdot S_{\omega y}-\zeta'\cdot S_x\right)=0, \tag{22}$$

$$N+E_0\cdot N_t+E_0\cdot\frac{z}{l}\left(\frac{z}{l}\cdot\xi''\cdot S_y+\frac{z}{l}\cdot\eta''\cdot S_x+\vartheta''\cdot S_\omega-\zeta'\cdot F\right)=0.$$

Здесь приняты следующие зависимости:

$$\frac{dQ_x}{dz}=q_x,\quad \frac{dQ_y}{dz}=q_y,\quad \frac{dN}{dz}=q_z, \tag{23}$$
$$\frac{dM_x}{dz}=-Q_y+m_x,\quad \frac{dM_y}{dz}=Q_x+m_y,$$

и введены обозначения:

$$M_{xt}=\oint\alpha t y_1\varphi\delta\,ds_1=\frac{z^2}{l^2}\oint\alpha\,ty\,\varphi\delta\,ds,$$

$$M_{yt}=\oint\alpha t x_1\varphi\delta\,ds_1=\frac{z^2}{l^2}\oint\alpha\,tx\,\varphi\delta\,ds, \tag{24}$$

$$N_t=\oint\alpha\,t\,\varphi\delta\,ds_1=\frac{z}{l}\oint\alpha\,t\,\varphi\delta\,ds.$$

Геометрические характеристики вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} I_x &= \oint y^2 \varphi\delta\, ds, \quad S_{\omega x} = \oint \omega\cdot x\, \varphi\delta\, ds, \quad S_x = \oint y\, \varphi\delta\, ds, \\ I_y &= \oint x^2 \varphi\delta\, ds, \quad S_{\omega y} = \oint \omega\cdot y\, \varphi\delta\, ds, \quad S_y = \oint x\, \varphi\delta\, ds, \\ I_{xy} &= \oint xy\, \varphi\delta\, ds, \quad S_{\omega} = \oint \omega\varphi\delta\, ds, \quad F = \oint \varphi\delta\, ds. \end{aligned} \tag{25}$$

Решая систему уравнений (22), получим:

$$\xi'' = k\left(\frac{l}{z}\right)^3 \cdot \left[\frac{M_{oy} - E_0 M_{oyt}}{E_0\cdot I_{oy}} + \frac{I_{oxy}}{I_{oy}}\left(\frac{M_{ox} + E_0 M_{oxt}}{E_0 I_{ox}}\right)\right] + \frac{l}{z} y_D \cdot \vartheta'',$$

$$\eta'' = k\left(\frac{l}{z}\right)^3 \left[-\frac{M_{ox} + E_0 M_{oxt}}{E_0 I_{ox}} - \frac{I_{oxy}}{I_{ox}}\left(\frac{M_{oy} - E_0 M_{oyt}}{E_0 I_{oy}}\right)\right] - \frac{l}{z} x_D \cdot \vartheta'',$$

$$\zeta' = k\cdot x_0 \left(\frac{l}{z}\right)^2 \left[\frac{M_{oy} - E_0 M_{oyt}}{E_0 I_{oy}} + \frac{I_{oxy}}{I_{oy}}\left(\frac{M_{ox} + E_0 M_{oxt}}{E_0 I_{ox}}\right)\right] +$$

$$+ k\cdot y_0 \left(\frac{l}{z}\right)^2 \cdot \left[-\frac{M_{ox} + E_0 M_{oxt}}{E_0 I_{ox}} - \frac{I_{oxy}}{I_{ox}}\left(\frac{M_{oy} - E_0 M_{oyt}}{E_0 I_{oy}}\right)\right] +$$

$$+ \left(y_D \cdot x_0 - x_D \cdot y_0 + \frac{S_\omega}{F}\right)\cdot \vartheta'' + \frac{l}{z}\, \frac{N + E_0 N_t}{E_0 F}. \tag{26}$$

Здесь:

$$M_{ox} = M_x - \frac{z}{l} y_0 N, \quad M_{oxt} = M_{xt} - \frac{z}{l} y_0 N_t,$$

$$M_{oy} = M_y + \frac{z}{l} x_0 N, \quad M_{oyt} = M_{yt} - \frac{z}{l} x_0\cdot N_t. \tag{27}$$

Геометрические характеристики вычисляются для сечения $z=e$:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{S_y}{F}, \quad I_{ox} = I_x - y_0^2 \cdot F, \\ & \qquad\quad I_{oy} = I_y - x_0^2\cdot F, \\ y_0 &= \frac{S_x}{F}, \quad I_{oxy} = I_{xy} - x_0\cdot y_0 F; \end{aligned} \tag{28}$$

$$k = \frac{1}{1 - \dfrac{I_{oxy}^2}{I_{ox}\cdot I_{oy}}},$$

$$\begin{aligned} x_D &= k\left[\frac{1}{I_{ox}}(S_{\omega y} - y_0 S_\omega) - \frac{I_{oxy}}{I_{ox} I_{oy}}(S_{\omega x} - x_0 S_\omega)\right] \\ y_D &= k\left[-\frac{1}{I_{oy}}(S_{\omega x} - x_0\cdot S_\omega) + \frac{I_{oxy}}{I_{ox} I_{oy}}(S_{\omega y} - y_0\cdot S_\omega)\right]. \end{aligned} \tag{29}$$

Отметим, что в общем случае все геометрические характеристики зависят от координаты z, т. е. являются переменными величинами.

Введем в рассмотрение бимоментные характеристики зависимостью:

$$B - E_0\cdot B_t = \left(\frac{z}{l}\right)^3 E_0 I_\omega^0 \vartheta''. \tag{30}$$

Формулы (26) на основании последнего выражения запишем в виде:

$$\xi'' = k\left(\frac{l}{z}\right)^3\left[\frac{M_{oy} - E_0 M_{oyt}}{E_0 I_{oy}} + \frac{I_{oxy}}{I_{oy}}\left(\frac{M_{ox} + E_0 M_{oxt}}{E_0 I_{ox}}\right)\right] + \left(\frac{l}{z}\right)^4 \frac{B - E_0 B_t}{E_0 I_\omega^0}\cdot y_D\,,$$

$$\eta'' = k\left(\frac{l}{z}\right)^3\left[-\frac{M_{ox} + E_0 M_{oxt}}{E_0 I_{ox}} - \frac{I_{oxy}}{I_{ox}}\left(\frac{M_{oy} - E_0 M_{oyt}}{E_0 I_{oy}}\right)\right] - \left(\frac{l}{z}\right)^4 \frac{B - E_0 B_t}{E_0 I_\omega^0}\cdot x_D\,,$$

$$\zeta' = k\cdot x_0\left(\frac{l}{z}\right)^2\left[\frac{M_{oy} - E_0 M_{oyt}}{E_0 I_{oy}} + \frac{I_{oxy}}{I_{ox}}\left(\frac{M_{ox} + E_0 M_{oxt}}{E_0 I_{ox}}\right)\right] + k\cdot y_0\left(\frac{l}{z}\right)^2\left[-\frac{M_{ox} + E_0 M_{oxt}}{E_0 I_{ox}} - \frac{I_{oxy}}{I_{ox}}\left(\frac{M_{oy} - E_0 M_{oyt}}{E_0 I_{oy}}\right)\right] + \left(\frac{l}{z}\right)^3\cdot\left(y_D\cdot x_0 - x_D\cdot y_0 + \frac{S_\omega}{F}\right)\cdot\frac{B - E_0 B_t}{E_0\cdot I_\omega^0} + \left(\frac{l}{z}\right)\frac{N + E_0 N_t}{E_0 F}\,. \tag{31}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ

Нормальные напряжения согласно зависимостей (11), (13) и (19) будут:

$$\sigma = \varphi\cdot E_0\left(\frac{z}{l}\xi''\cdot x - \frac{z}{l}\eta''\cdot y - \vartheta''\cdot\omega + \zeta' - \alpha t\right). \tag{32}$$

Подставляя сюда значения (31), получим:

$$\sigma = \varphi(z, s)\left\{k\cdot\left(\frac{l}{z}\right)^2\cdot\left(\frac{M_{ox}}{I_{ox}}y^* - \frac{M_{oy}}{I_{oy}}x^*\right) + \frac{l}{z}\frac{N}{F} - \left(\frac{l}{z}\right)^3\frac{B}{I_\omega^0}\omega_0 + E_0\left[k\cdot\left(\frac{l}{z}\right)^2\left(\frac{M_{oxt}}{I_{ox}}y^* + \frac{M_{oyt}}{I_{oy}}x^*\right) + \frac{l}{z}\frac{N_t}{F} + \left(\frac{l}{z}\right)^3\frac{B_t}{I_\omega^0}\omega_0 - \alpha t\right]\right\} \tag{33}$$

Здесь

$$x^* = x - x_0 - (y - y_0)\frac{I_{oxy}}{I_{ox}},\quad y^* = y - y_0 - (x - x_0)\frac{I_{oxy}}{I_{oy}}\,, \tag{34}$$

$$\omega_0 = \omega - x_D(y - y_0) + y_D(x - x_0) - \frac{S_\omega}{F}.$$

Поток касательных напряжений определяется из уравнения равновесия:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{z}{l}\sigma\cdot\delta\right] + \frac{\partial q}{\partial s} = 0.$$

Подставляя сюда напряжения (33) и интегрируя, получим:

$$q = \frac{\partial}{\partial z}\cdot\left\{k\cdot\frac{l}{z}\left(\frac{M_{ox}}{I_{ox}}S_x^* - \frac{M_{oy}}{I_{oy}}S_y^*\right) + N\frac{F_0}{F} - \left(\frac{l}{z}\right)^2\frac{B}{I_\omega^0}S_\omega^* + E_0\left[k\cdot\frac{l}{z}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\frac{M_{oxt}}{I_{ox}}S_x^* + \frac{M_{oyt}}{I_{oy}}S_y^*\right) + N_t\frac{F_0}{F} + \left(\frac{l}{z}\right)^2\frac{B_t}{I_\omega^0}S_\omega - \int_0^s \alpha t\,\varphi\delta\,ds\right]\right\} + q_0(z), \quad (35)$$

где $S_x^* = \int_0^s y^*\varphi\delta\,ds, \quad S_y^* = \int_0^s x^*\cdot\varphi\delta\,ds,$

$$S_\omega^* = \int_0^s \omega_0\varphi\delta\,ds, \quad F_0 = \int_0^s \varphi\delta\,ds, \quad (36)$$

$$B_t = \frac{z^3}{l^3}\oint \alpha t\,\omega_0\varphi\delta\,ds.$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ КРУЧЕНИЯ

На основании формул (26) представим уравнение (21) в следующем виде:

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{l^2}\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{l}E_0 I_\omega^0\vartheta''\right) - \frac{d}{dz}\left(\frac{l}{z}G_0 I_\kappa\vartheta'\right)\right] = m_z - \frac{d}{dz}\oint\frac{z^3}{l^3}\,p_z\,\omega ds +$$

$$+\frac{d}{dz}\left\{\frac{z^2}{l^2}\frac{d}{dz}\left[\frac{l}{z}(x_D M_x + y_D M_y) - \omega_0(0)N - E_0\frac{z}{l}\oint\alpha t\,\omega_0\varphi\delta\,ds\right]\right\}. \quad (37)$$

Здесь

$$\omega_0(0) = x_D y_0 - y_D x_0 - \frac{S_\omega}{F};$$

$$I_\omega^0 = \oint \omega_0^2\varphi\delta\,ds, \quad I_\kappa = \oint\frac{\psi\cdot\delta^3\cdot ds}{3}. \quad (38)$$

В общем случае это дифференциальное уравнение четвертого порядка с переменными коэффициентами.

При степенном законе изменения толщины и функции упругости $\varphi(z, s)$ уравнение (37) приводится к уравнению Бесселя относительно функции $\vartheta'(z)$, которое интегрируется в модифицированных цилиндрических функциях [3], а если еще пренебречь жесткостью свободного кручения, то получим уравнение Эйлера [2].

При $z\to\infty$, $l\to\infty$, так, что $\frac{z}{l}\to 1$ получим формулы и уравнения для цилиндрических стержней.

При этом уравнение кручения будет иметь вид:

$$\frac{d^2}{dz^2}(E_0 I_\omega^0\Theta'') - \frac{d}{dz}(G_0 I_\kappa\Theta') =$$

$$= m - \frac{d}{dz}\oint p_z\,\omega_0\,ds - E_0\frac{d^2}{dz^2}\oint\alpha t\,\omega_0\varphi\delta\,ds. \quad (39)$$

Здесь

$$m = \oint [p_y (x - x_D) - p_x (y - y_D)]\, ds.$$

В заключение отметим, что дифференциальные уравнения и формулы для напряжений и перемещений выведены в произвольно расположенных ортогональных осях координат. При этом нет необходимости вводить такие понятия как центр тяжести или обобщенный центр тяжести, центр изгиба, главные секториальные характеристики и т. д. Эти понятия связаны с геометрической интерпретацией ортогонализации функций 1, x, y и ω, которая в рассматриваемой методике расчета не делается. В общем случае вести расчет в главных центральных осях неудобно и могут возникнуть затруднения при вычислении силовых факторов и геометрических характеристик.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. З. Власов. Тонкостенные упругие стержни, Физматгиз, 1959.
2. В. И. Климов. Расчет открытых оболочек типа авиаконструкций, Оборонгиз, 1957.
3. В. И. Климов. Расчет тонкостенных конических стержней открытого профиля, Прочность авиационных конструкций, Труды МАИ, вып. 130, Оборонгиз, 1960.