КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С. П. КОРОЛЕВА
Труды, выпуск 48, 1971 г.
Вопросы прочности элементов авиационных конструкций

Ю. Л. Тарасов

РАСЧЕТ КОНИЧЕСКИХ И СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, НАГРУЖЕННЫХ ПО КРАЮ КРУГОВОГО ОТВЕРСТИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ОСЕВЫМИ СИЛАМИ

Принятые обозначения

M_1, M_2, Q, N_1, N_2 — изгибающие моменты, перерезывающая сила, нормальные усилия;
δ, D — толщина оболочки, изгибная жесткость оболочки;
μ, E — коэффициент Пуассона, модуль упругости материала оболочки;
p — внутреннее давление;
Δ — приращение радиуса параллельного круга оболочки;
ϑ — угол поворота нормали к меридиану оболочки.

При исследовании напряженного состояния сочленений оболочек вращения приходится рассматривать оболочки под воздействием самоуравновешенных контурных усилий M, H и распределенных по краю кругового отверстия осевых сил N (фиг. 1).

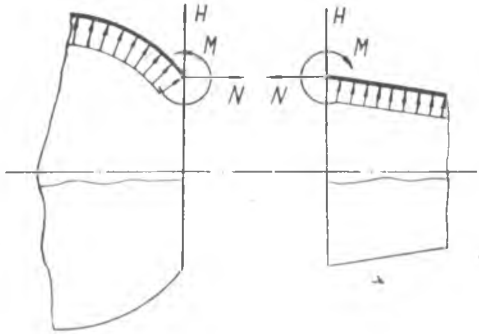
Дифференциальные уравнения, характеризующие деформированное состояние оболочки вращения, имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} L(V)+\mu V &= E\delta R_1\vartheta+\Phi(\theta), \\ L(\vartheta)-\mu\vartheta &= -\frac{R_1}{D}V. \end{aligned} \tag{1}$$

Через функции V и ϑ выражаются перемещения, усилия и деформации оболочки. Функция $\Phi(\Theta)$ определяется характером нагрузок, действующих на оболочку. При нагружении только самоуравновешенными контурными усилиями $\Phi(\Theta)=0$, следовательно, система уравнений будет однородной. При действии же сил N и поверхностной нагрузки p уравнения (1) будут неоднородными и возникает необходимость отыскивать их частные решения. Для этого случая нагружения предлагается способ представления напряженного состояния оболочки в виде суммы двух состояний (фиг. 2). Одно из них (фиг. 2 б) соответствует нагружению самоуравновешенными силами, перпендикулярными, как силы H, оси оболочки; другое показано на фиг. 2в.

Такое представление напряженного состояния производит ниже для конической и сферической оболочек.

а) Коническая оболочка.



Фиг. 1.

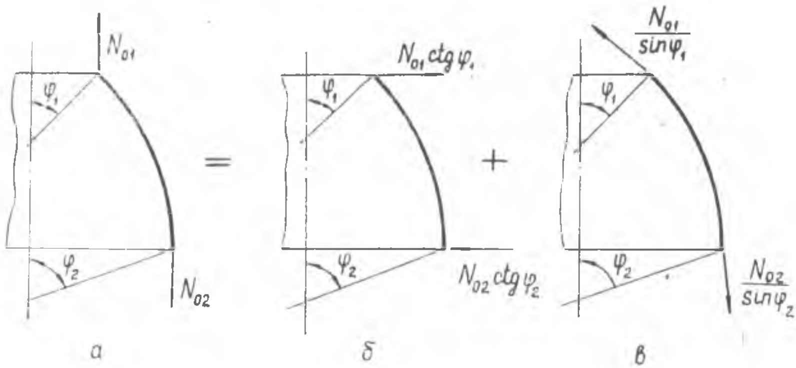
Рассмотрим оболочку, сх ма нагружения которой г казана на фиг. 3а. Из эт схемы видно, что оболоч подвержена действию сил параллельных оси, и вну ренного давления p. Эти н грузки заменяются самоура новешенными силами Ntg перпендикулярными оси об лочки (фиг. 3б), и силам $N/\cos\alpha$, действующи вдоль образующих оболо ки совместно с внутренн нормальным давлением (фиг. 3в). Оболочка в п следнем случае будет работать в напряженном состоянии, бли ком к безмоментному [2].

На основании общего решения однородной системы уравнени изгиба конических оболочек [3] формулы для определения усил и перемещений ϑ; Δ можно привести к следующему виду:

$$Q = \frac{1}{s}\left[B_1 a_1(x) + D_1 b_1(x) + B_2 a_2(x) + D_2 b_2(x)\right], \qquad (\text{:}$$

$$N_1 = -Q\operatorname{tg}\alpha, \qquad (\text{:}$$

$$N_2 = -\frac{\operatorname{tg}\alpha}{s}\left[B_1 d_1(x) + D_1 h_1(x) + B_2 d_2(x) + D_2 h_2(x)\right], \qquad (4$$



Фиг. 2

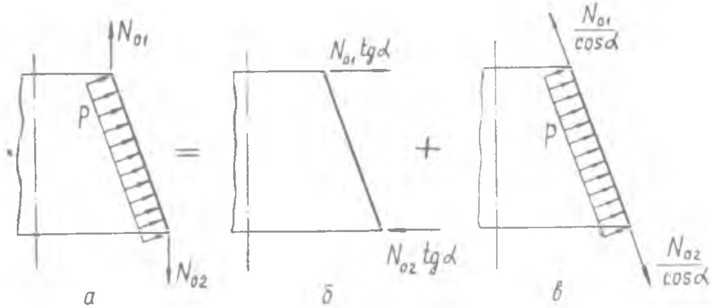
$$M_1 = \frac{1}{2\lambda^2 s}\left[B_1 g_1(x) - D_1 q_1(x) + B_2 g_2(x) - D_2 q_2(x)\right], \tag{5}$$

$$M_2 = \frac{1}{2\lambda^2 s}\left[B_1 p_1(x) - D_1 k_1(x) + B_2 p_2(x) - D_2 k_2(x)\right], \tag{6}$$

$$\vartheta = \frac{1}{D\lambda^2}\left[B_1 b_1(x) - D_1 a_1(x) + B_2 b_2(x) - D_2 a_2(x)\right], \tag{7}$$

$$\Delta = \frac{s \operatorname{tg}\alpha \sin\alpha}{E\delta}(N_2 - \mu N_1) =$$

$$= -\frac{\operatorname{tg}^2\alpha \sin\alpha}{E\delta}\left[B_1 f_1(x) + D_1 m_1(x) + B_2 f_2(x) + D_2 m_2(x)\right]. \tag{8}$$



Фиг. 3.

В этих формулах

$$a_1 = ker\,x - \frac{2}{x} kei'x; \quad b = kei\,x + \frac{2}{x} ker'x; \tag{9}$$

$$d_1 = x ker'x - 2 ker\,x + \frac{4}{x} kei'x;$$

$$h_1 = x kei'x - 2 kei\,x - \frac{4}{x} ker'x; \tag{10}$$

$$g_1 = h_1(x) + 2\mu b_1(x); \quad q_1 = d_1(x) + 2\mu a_1(x); \tag{11}$$

$$p_1 = \mu h_1(x) + 2b_1(x); \quad k_1 = \mu d_1(x) + 2a_1(x); \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= d_1(x) - \mu a_1(x), \\ m_1 &= h_1(x) - \mu b_1(x); \end{aligned}\right. \tag{13}$$

$$x = 2\lambda\sqrt{s} = 2\sqrt[4]{12(1-\mu^2)\operatorname{ctg}^2\alpha}\sqrt{\frac{s}{\delta}}. \tag{14}$$

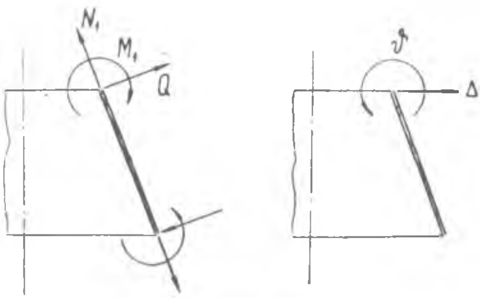
Формулы для определения функций, имеющих индексы «2», получаются из (9)—(13) путем замены функций *ker x*, *kei x* и их производных на *ber x*, *bei x* и их производные.

Положительные направления усилий и перемещений показаны на фиг. 4.

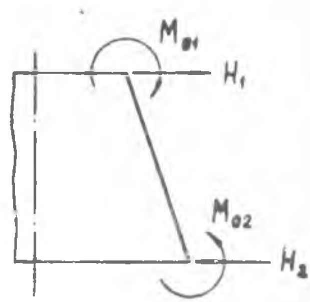
Для определения постоянных интегрирования воспользуемся граничными условиями для случая, показанного на фиг. 5:

$$\text{при} \quad s = s_1 \quad M_1(x_1) = M_{01}, \quad Q(x_1) = H_1 \cos\alpha, \tag{15}$$

$$s = s_2 \quad M_1(x_2) = M_{02}, \quad Q(x_2) = H_2 \cos\alpha. \tag{16}$$

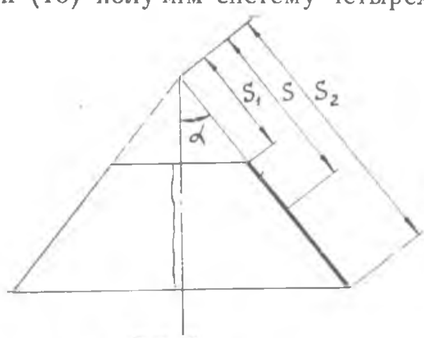


Фиг. 4.



Фиг. 5.

Величины x_1 и x_2 определяются по формуле (14) и соответствуют s_1 и s_2 (фиг. 6). На основании выражений (2) и (5) из (15) и (16) получим систему четырех линейных алгебраических уравнений относительно B_1, D_1, B_2 и D_2.



Фиг. 6.

Ограничимся рассмотрением оболочек, стенка которых достаточно тонка, а расстояние между основаниями настолько велико, что $x_2 - x_1 \geqslant 4$. Тогда силы, приложенные к одному основанию, не будут влиять на деформации оболочки у другого основания, и постоянные B_1 и D_1 могут быть определены независимо от B_2 и D_2.

Решив эти уравнения, получим

$$\left.\begin{aligned}
B_1 &= y_1(x_1)\left[s_1 H_1 q_1(x_1)\cos\alpha + \frac{1}{2}x_1^2 M_{01} b_1(x_1)\right],\\
D_1 &= y_1(x_1)\left[s_1 H_1 q_1(x_1)\cos\alpha - \frac{1}{2}x_1^2 M_{01} a_1(x_1)\right],\\
B_2 &= y_2(x_2)\left[s_2 H_2 q_2(x_2)\cos\alpha + \frac{1}{2}x_2^2 M_{02} b_2(x_2)\right],\\
D_2 &= y_2(x_2)\left[s_2 H_2 q_2(x_2)\cos\alpha - \frac{1}{2}x_2^2 M_{01} a_2(x_2)\right],
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

где

$$y_1(x_1) = \frac{1}{g_1(x_1)\,b_1(x_1) + q_1(x_1)\,a_1(x_1)},$$
$$y_2(x_2) = \frac{1}{g_2(x_2)\,b_2(x_2) + q_2(x_2)\,a_2(x_2)}. \tag{18}$$

Положив в (17) $M_{01}=M_{02}=0$, $H_1=N_{01}\operatorname{tg}\alpha$ и $H_2=N_{02}\operatorname{tg}\alpha$, получим для схемы нагружения, представленной на фиг. 4 б:

$$\vartheta(x_1) = E\delta^2 s_1 \cos\alpha\, N_{01}\, \nu_1(x_1), \tag{19}$$

$$\Delta(x_1) = -\frac{s_1 \operatorname{tg}^2\alpha \sin^2\alpha}{E\delta} N_{01}\, \varkappa_2(x_1), \tag{20}$$

$$\vartheta(x_2) = E\delta^2 s_2 \cos\alpha\, N_{02}\, \nu_2(x_2), \tag{21}$$

$$\Delta(x_2) = -\frac{s_2 \operatorname{tg}^2\alpha \sin^2\alpha}{E\delta} \cdot N_{02}\, \varkappa_2(x_2). \tag{22}$$

Здесь

$$\nu_1(x_1) = \frac{y_1(x_1)}{\sqrt{12(1-\mu^2)}} [b_1(x_1)\,q_1(x_1) - a_1(x_1)\,g_1(x_1)], \tag{23}$$

$$\varkappa_1(x_1) = y_1(x_1)\,[f_1(x_1)\,q_1(x_1) + m_1(x_1)\,g_1(x_1)], \tag{24}$$

$$\nu_2(x_2) = \frac{y_2(x_2)}{\sqrt{12(1-\mu^2)}} [b_2(x_2)\,q_2(x_2) - a_2(x_2)\,g_2(x_2)], \tag{25}$$

$$\varkappa_2(x_2) = y_2(x_2)\,[f_2(x_2)\,q_2(x_2) + m_2(x_2)\,g_2(x_2)]. \tag{26}$$

Вычисления, проведенные с использованием таблиц [7], показывают, что в интервале $10 \leqslant x \leqslant 100$ значения функций ν_1 и ν_2 практически постоянны и равны 0,3, функции же $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ могут быть аппроксимированы прямой $\varkappa_1 = \varkappa_2 \approx 1{,}43\,x$.

Действие сил $H_1=N_{01}\operatorname{tg}\alpha$ сказывается на перемещениях и напряжениях в точках оболочки, для которых $x - x_1' \leqslant 4$. Для определения усилий и перемещений Δ и ϑ следует воспользоваться формулами:

$$Q = y_1(x_1)\frac{s_1}{s} H_1 \cos\alpha\, [q_1(x_1)\,a_1(x) + g_1(x_1)\,b_1(x)], \tag{27}$$

$$N_1 = -\operatorname{tg}\alpha\, Q, \tag{28}$$

$$M_1 = y_1(x_1)\frac{s_1}{s}\,\frac{H_1\cos\alpha}{2\lambda^2} [q_1(x_1)\,g_1(x) - g_1(x_1)\,q_1(x)], \tag{29}$$

$$\Delta = -\frac{1}{E\delta}\, y_1(x_1)\, s_1 H_1 \operatorname{tg}\alpha \sin^2\alpha\, [q_1(x_1)\,f_1(x) + g_1(x_1)\,m_1(x)], \tag{30}$$

$$\vartheta = \frac{1}{D\lambda^2}\, y_1(x_1)\, s_1 H_1 \cos\alpha\, [q_1(x_1)\,b_1(x) + g_1(x_1)\,a_1(x)]. \tag{31}$$

Перемещения и усилия в точках оболочки, для которых $x_2 - x \leqslant 4$, зависят от сил $H_2=N_{02}\operatorname{tg}\alpha$ и для их определения имеем такие формулы:

$$Q = y_2(x_2)\frac{s_2}{s} H_2 \cos\alpha\, [q_2(x_2)\,a_2(x) + g_2(x_2)\,b_2(x)], \tag{32}$$

$$N = -\operatorname{tg}\alpha Q, \tag{33}$$

$$M_1 = y_2(x_2)\,\frac{s_2}{s}\,\frac{H_2\cos\alpha}{2\lambda^2}\,[q_2(x_2)\,g_2(x) - g_2(x_2)\,q_2(x)], \tag{34}$$

$$\Delta = -\frac{1}{E\delta}\,y_2(x_2)\,s_2 H_2 \operatorname{tg}\alpha\sin^2\alpha\,[q_2(x_2)\,f_2(x) + g_2(x_2)\,m_2(x)], \tag{35}$$

$$\vartheta = \frac{1}{D\lambda^2}\,y_2(x_2)\,s_2 H_2\cos\alpha\,[q_2(x_2)\,b_2(x) + g_2(x_2)\,a_2(x)]. \tag{36}$$

Если для рассматриваемой оболочки $4 \leqslant x_2 - x_1 \leqslant 8$, то при вычислении усилий и перемещений в точках, для которых $x_2 - x < 4$ и $x - x_1 < 4$, следует суммировать результаты, определенные соответственно по формулам (27)—(31) и (32)—(36).

Усилия и перемещения в точках оболочки для напряженного состояния, показанного на фиг. 3 в, определяются по формулам:

$$N_1 = \frac{1}{2}\,ps\operatorname{tg}\alpha\left(1 - \frac{s_1^2}{s^2}\right) + \frac{N_{01}}{\cos\alpha}\,\frac{s_1}{s}, \tag{37}$$

$$N_2 = ps\operatorname{tg}\alpha, \tag{38}$$

$$\Delta = \frac{ps^2\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha}{2E\delta}\left(2 - \mu + \mu\,\frac{s_1^2}{s^2}\right) - \frac{\mu N_{01}\operatorname{tg}\alpha}{E\delta}\,\frac{s^2}{s_1}, \tag{39}$$

$$\vartheta = \frac{ps\operatorname{tg}^2\alpha}{2E\delta}\left(3 + \frac{s_1^2}{s^2}\right) + \frac{N_{01}\operatorname{tg}\alpha}{E\delta\cos\alpha}\,\frac{s_1}{s}. \tag{40}$$

Итак, формулы (27)—(29), (32)—(34), (37) и (38) характеризуют напряженное состояние, показанное на фиг. 3 а, при помощи же формул (19)—(22)—(39) и (40) можно найти величины, необходимые для решения задачи о напряжениях и деформациях в сочленении конической оболочки с другими оболочками вращения.

Следует отметить, что выражения (37)—(40) совпадают с результатами безмоментной теории [4]. Изгибающие моменты хотя и будут здесь, но напряжения, вызываемые ими, будут невелики по сравнению с напряжениями от действия N_1 и N_2.

б) Сферическая оболочка.

Вертикальную погонную нагрузку, действующую на сферическую оболочку (фиг. 7 а), как и в предыдущем случае, можно представить в виде результирующей двух нагрузок. Одна из них, а именно $N_{01}\operatorname{ctg}\varphi_1$, перпендикулярна оси оболочки (фиг. 7 б). Силы же $N_{01}/\sin\varphi_1$ действуют по касательной к меридиану при $\varphi = \varphi_1$. При действии этих сил и внутреннего давления p состояние оболочки будет безмоментным.

Для безмоментного напряженного состояния, показанного на фиг. 7 в:

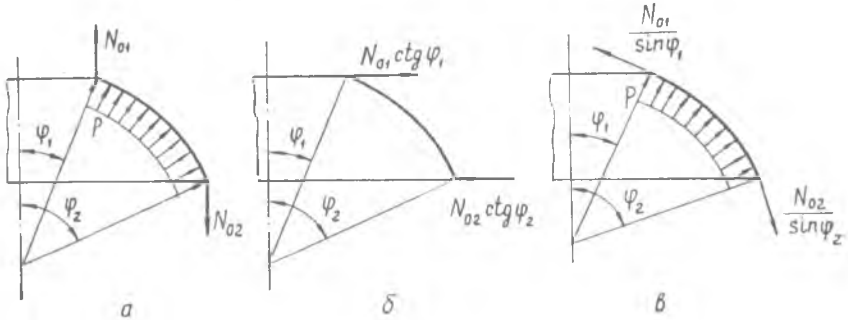
$$N_1 = \frac{N_{01}\sin\varphi_1}{\sin^2\varphi} + \frac{1}{2}\,pR\left(1 - \frac{\sin^2\varphi_1}{\sin^2\varphi}\right), \tag{41}$$

$$N_2 = -\frac{N_{01}\sin\varphi_1}{\sin^2\varphi} + \frac{1}{2}pR\left(1 + \frac{\sin^2\varphi_1}{\sin^2\varphi}\right) \tag{42}$$

$$\Delta = -\frac{1+\mu}{E\delta}\,\frac{N_{01}\,R\sin\varphi_1}{\sin\varphi} + \frac{pR^2\sin\varphi}{2E\delta}\left[1-\mu+(1+\mu)\frac{\sin^2\varphi_1}{\sin^2\varphi}\right], \tag{43}$$

$$\vartheta = 0.$$

Для определения величин, характеризующих напряженное состояние, представленное на фиг. 78, можно воспользоваться результатами, приведенными в статье [5].



Фиг. 7.

Отметим в заключение, что при использовании предлагаемого способа представления напряженного состояния оболочек вращения отпадает надобность в рассмотрении одного моментного напряженного состояния в случае исследования зоны сочленений оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман, К. К. Лихарев, В. М. Макушин, Н. Н. Малинин, В. П. Феодосьев. Расчеты на прочность в машиностроении, т. 2, Машгиз, 1958.
2. В. В. Новожилов. Теория тонких оболочек, Судпромгиз, 1962.
3. В. Флюгге. Статика и динамика оболочек, Госстройиздат, 1961.
4. З. Б. Канторович. Основы расчета химических машин и аппаратов, Машгиз, 1960.
5. Ю. Л. Тарасов. Определение напряжений в сочленении трубопровода со сферическим днищем бака. Труды КуАИ, вып. 39, 1968.
6. Ю. Л. Тарасов. Инженерный метод определения напряжений в сочленениях трубок с пластинами при наличии конического переходного участка. Труды КуАИ, вып. XXIX, 1967.
7. Л. Н. Носова. Таблицы функций Томсона и их первых производных, изд-во АН СССР, 1960.
8. G. D. Galletly Influence Coefficients for Open — Crown Hemispheres, Journal of Engineering for Industry, № 1, 1960.