

Г.В.Канова, Л.М.Савельев

РАСЧЕТ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С КРУГЛЫМ
ОТВЕРСТИЕМ ПРИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Напряженное состояние тонкой круговой цилиндрической оболочки, ослабленной круглым отверстием, рассматривалось многими авторами [1 - 4] в предположении упругой работы материала оболочки. В настоящей работе на основе деформационной теории пластичности исследуется влияние физической нелинейности материала на распределение напряжений около отверстия.

При отсутствии распределенной нагрузки систему дифференциальных уравнений теории пологих физически нелинейных оболочек [5] можно в случае цилиндрической оболочки привести к виду [6]

$$\nabla^2 \nabla^2 w - 8 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = M, \quad \nabla^2 \nabla^2 \varphi + 8 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = N, \quad (I)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \quad \xi = \frac{\omega x}{R_0}, \quad \eta = \frac{\omega y}{R_0}$$

$$w = \frac{EW}{8R\sigma^0}, \quad \omega = \frac{1}{2} \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R_0}} \frac{R_0}{\sqrt{Rh}}$$

Здесь w , φ - прогиб и функция напряжений; x , y - координаты срединной поверхности; R , h - радиус и толщина оболочки; R_0 - радиус отверстия; E , μ - модуль упругости и коэффициент Пуассона, σ^0 - характерное напряжение в оболочке.

Правые части уравнений (I) равны

$$M = \frac{1}{2} \nabla^2 (m_1 - m_2) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial m_2}{\partial \eta} + \frac{\partial m_3}{\partial \xi} \right)$$

$$N = \frac{1}{2} \nabla^2 (n_1 - n_2) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial n_2}{\partial \eta} + \frac{\partial n_3}{\partial \xi} \right),$$
(2)

где

$$n_{1(2)} = (1 \mp \mu) F_{2(1)}^* (N_{\xi} \pm N_{\eta}) + \frac{S_{2(1)}^*}{1 \pm \mu} (M_{\xi} \pm M_{\eta})$$

$$n_3 = -2 \left[(1 + \mu) F_1^* N_{\xi \eta} + \frac{S_1^*}{1 - \mu} M_{\xi \eta} \right]$$
(3)

$$m_{1(2)} = \mp \left[J_{2(1)}^* (M_{\xi} \pm M_{\eta}) + S_{2(1)}^* (N_{\xi} \pm N_{\eta}) \right]$$

$$m_3 = -2 \left[J_1^* M_{\xi \eta} + S_1^* N_{\xi \eta} \right].$$

Безразмерные величины N_{ξ} , ..., $M_{\xi \eta}$ связаны с усилиями и моментами соотношениями ($A = \sqrt{12(1-\mu^2)}$)

$$N_{\xi} = \frac{N_x}{h \sigma^0}, \quad N_{\eta} = \frac{N_y}{h \sigma^0}, \quad N_{\xi \eta} = \frac{T}{h \sigma^0}$$

$$M_{\xi} = \frac{AM_x}{h^2 \sigma^0}, \quad M_{\eta} = \frac{AM_y}{h^2 \sigma^0}, \quad M_{\xi \eta} = \frac{AH}{h^2 \sigma^0}$$
(4)

и выражаются через w и φ посредством формул

$$N_{\xi} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}, \quad N_{\eta} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}, \quad N_{\xi \eta} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta}$$

$$M_{\xi} = -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) + \frac{m_1 - m_2}{2}$$
(5)

$$M_{\eta} = -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) + \frac{m_1 + m_2}{2}, \quad M_{\xi \eta} = -(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{m_3}{2}$$

Положительные направления осей, сил и моментов даны на рис. I.

Остальные величины в формулах (3) определяются [6] через "потерянные" за счет пластических деформаций погонные площадь, статический момент и момент инерции.

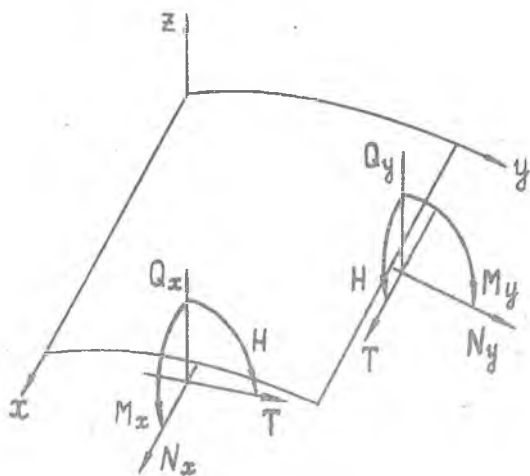


Рис. 1.

Решение системы (I) отыскивается в полярных координатах ρ, θ ($\xi = \rho \cos \theta, \eta = \rho \sin \theta$) методом последовательных приближений, в процессе которых уточняются функции m_j, n_j ($j = 1, 2, 3$), фигурирующие в правых частях (I); в нулевом приближении эти функции принимаются равными нулю. Решение однородной системы, соответствующей уравнениям (I), записывается по формулам работ [7, 8], частное же решение неоднородных уравнений отыскивается методом итераций по схеме.

$$\nabla^2 \nabla^2 w^{(k)} = M + 8 \frac{\partial^2 \varphi^{(k-1)}}{\partial \xi^2}, \quad \nabla^2 \nabla^2 \varphi^{(k)} = N - 8 \frac{\partial^2 w^{(k-1)}}{\partial \xi^2}, \quad (6)$$

где k - номер приближения; в нулевом приближении вторые слагаемые в правых частях (6) принимаются равными нулю.

Таким образом, предлагаемый метод решения упруго-пластических задач для цилиндрической оболочки с отверстием заключается в использовании двух процессов последовательных приближений. Один из них (назовем его \bar{L} -процессом) используется для последовательного уточнения правых частей системы (I). Другой

(К -процессе) применяется на каждом этапе L -процесса для отыскания частного решения этой системы. Как показали числовые расчеты, К -процесс обладает хорошей сходимостью; использование двух процессов последовательных приближений применялось ранее в осесимметричной задаче [9] .

Функции m_j , n_j вычисляются в полярных координатах по формулам (3) с заменой в них индексов ξ и η на ρ и θ ; величины N_ρ , N_θ , $N_{\rho\theta}$, M_ρ , M_θ и $M_{\rho\theta}$ связаны с усилиями и моментами в полярных координатах соотношениями типа (4).

Все величины, характеризующие напряженное состояние, в том числе m_j , n_j , подсчитывались в отдельных точках, получаемых на пересечении координатных линий $\rho = const$ и $\theta = const$. Угол θ менялся через 5° , а количество точек на луче $\theta = const$ принималось различным в зависимости от требуемой точности расчета и размера пластической зоны; расстояние между этими точками увеличивалось с удалением от края отверстия. На каждом этапе L -процесса функции m_j , n_j разлагались в тригонометрические ряды путем численного подсчета коэффициента Фурье для каждого значения координаты ρ [IO, II] . Если вторые члены в правых частях системы (6) преобразовать с помощью формулы

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} = \frac{1}{2} V^2 + \frac{\cos 2\theta}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) - \frac{\sin 2\theta}{\rho} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) ,$$

то частное решение этой системы можно также искать в виде тригонометрического ряда по угловой координате θ . Для отыскания коэффициентов этого ряда, которые являются функциями ρ , можно воспользоваться процедурой численного интегрирования [IO, II] . Применением интегрирования по частям удастся получить расчетные формулы для перемещений, усилий и моментов, не требующие численного дифференцирования функций m_j , n_j .

Интенсивность деформаций, а также значение коэффициента поперечного сужения, необходимые для вычисления интегральных характеристик $F_{1(2)}^*$, $S_{1(2)}^*$ и $J_{1(2)}^*$ [6] , находились в 9 точках по толщине оболочки; для интегрирования по толщине использовалась формула Симпсона.

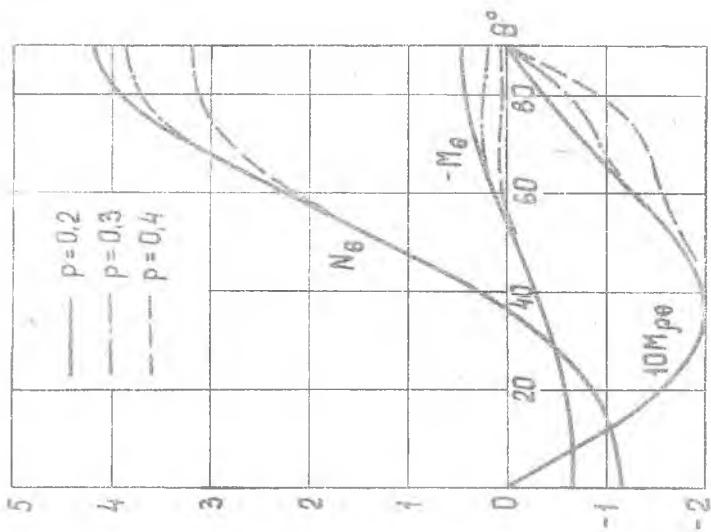


Рис. 3

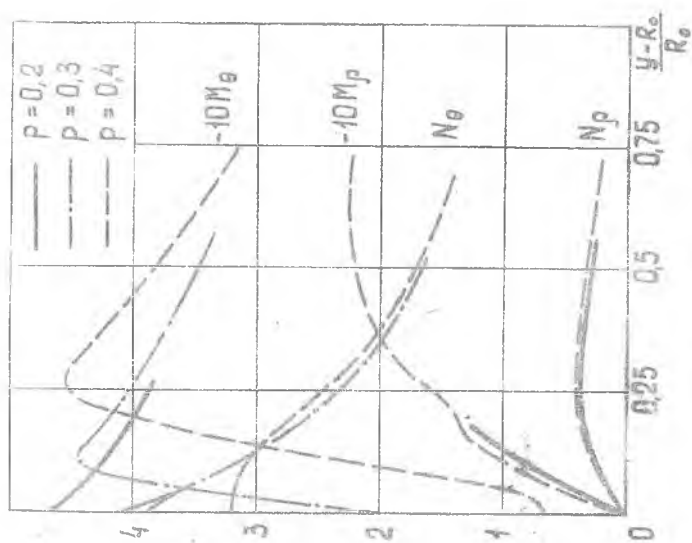


Рис. 2

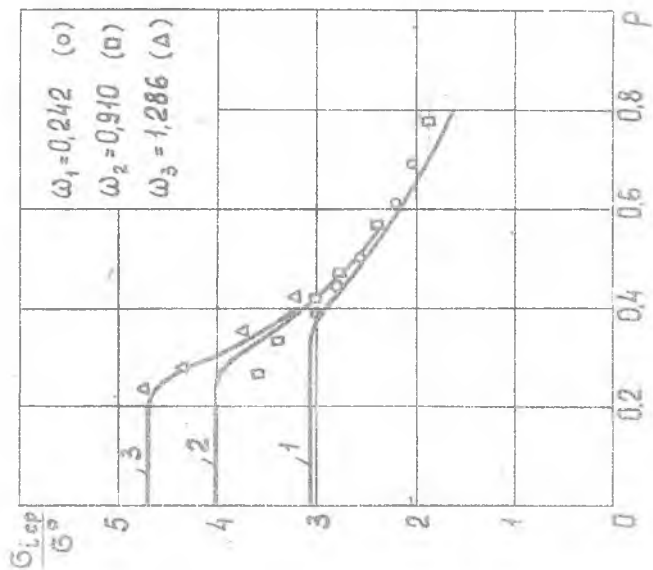


Рис. 5

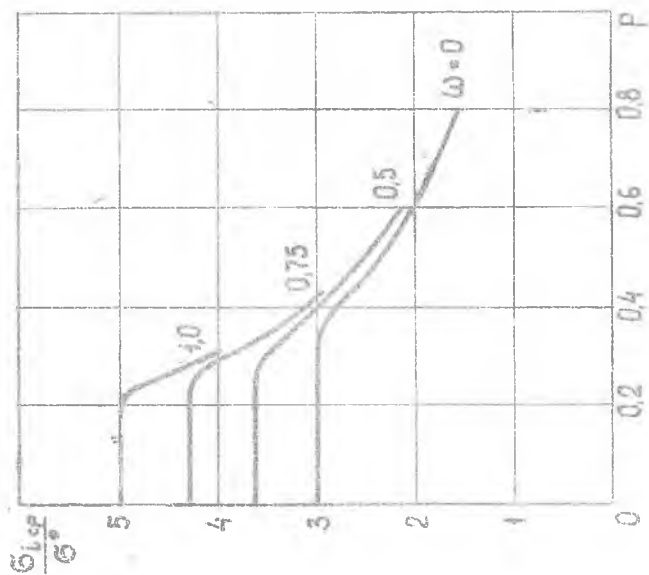


Рис. 4

Ниже приведены некоторые результаты расчетов, выполненных на ЭВМ М-20 для случая растяжения оболочки вдоль образующей равномерными усилиями $h\sigma^0$. Диаграмма растяжения материала на участке упрочнения аппроксимировалась кривой, плавно сопрягаемой с линейным участком [6].

На рис. 2 и 3 дано распределение безразмерных усилий и моментов в сечении $\theta = \frac{\pi}{2}$ и вдоль края отверстия для значения параметра кривизны $\omega = 1$.

Через ρ здесь обозначен параметр нагружения, равный отношению σ^0 к пределу пропорциональности. По горизонтальной оси на рис. 2 отложено относительное расстояние от края отверстия. Интенсивность напряжений достигает наибольшего значения $\sigma_{i \max}$ на контуре отверстия при $\theta = \frac{\pi}{2}$ на внутренней поверхности. Величина $K = \frac{\sigma_{i \max}}{\sigma^0}$ характеризует концентрацию напряжений около отверстия. Значение K в упругой задаче для $\omega = 1$ равно 5,013, так что появление пластических деформаций происходит при $\rho = 1,995$. Как видно из рис. 2 и 3, наибольшее перераспределение усилий и моментов происходит в той зоне, где появляются пластические деформации.

Вследствие использования в граничных условиях обобщенной перерезывающей силы крутящий момент на контуре отверстия не равен нулю; по его величине можно составить представление о погрешности, возникающей за счет приближенного удовлетворения граничным условиям.

Зависимость коэффициента концентрации напряжений от величины внешней нагрузки показана на рис. 4 для различных значений параметра кривизны ω . Горизонтальные участки кривых соответствуют упругому деформированию оболочки. Кривая $\omega = 0$ построена по результатам расчетов для плоской пластины [11].

На рис. 5 результаты расчетов сопоставлены с экспериментальными данными [12], полученными при растяжении дюралевых оболочек. Кривые на рис. 5 показывают расчетную зависимость отношения интенсивности напряжений в срединной поверхности $\sigma_{i \text{ ср}}$ к σ^0 , точками отмечены соответствующие экспериментальные величины. Сопоставление опытных данных с расчетными является удовлетворительным.

Л и т е р а т у р а

1. Лурье А.И. Статика тонкостенных упругих оболочек. ОГИЗ, М.-О., 1947.
2. Приварников А.К., Чехов В.Н. В сб. "Гидромеханика", вып. 2, Изд-во Харьк. унив-та, 1965.
3. Lekkerkerker J.G. *On the stress distribution in cylindrical shells weakened by a circular hole.* Uitgeverij Waltman, Delft, 1965.
4. Хазанов Х.С. Труды КуАИ, вып. 36, 1969.
5. Цурпал И.А., Шульга Н.А. Прикладная механика. I, I2, 1965.
6. Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Труды УШ Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. "Наука", М., 1973.
7. Савин Г.М., Гузь О.М. ДАН УРСР, № II, 1964.
8. Хазанов Х.С. Труды КуАИ, вып. 29, 1967.
9. Горлач Б.А. Труды КуАИ, вып. 60, 1973.
10. Савельев Л.М. Труды КуАИ, вып. 48, 1971.
11. Савельев Л.М. Труды КуАИ, вып. 60, 1973.
12. Александров А.Я., Ахметзянов М.Х., Ракин А.С. Прикладная механика, 2, № 3, 1966.