ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
Межвузовский сборник, вып. I, 1974

Б.А.Горлач, Б.В.Мокеев

ПОСТРОЕНИЕ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ УПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Современная практика расчета конструкций основывается, как правило, на предположении о ненапряженном исходном состоянии, тогда как реальные конструкции в процессе их производства или в результате предварительного нагружения имеют в исходном состоянии некоторые напряжения. Учет последних в уравнениях теории упругости и является целью настоящей статьи.

Получена замкнутая система уравнений с учетом конечности перемещений, которая записана в метрике исходного состояния.

Свяжем с деформируемым телом систему лагранжевых координат x^k и рассмотрим два равновесных состояния этого тела.

Первое исходное состояние характеризуется базисными векторами $\overset{1}{\tau}_k$, симметричным тензором напряжений Коши $\overset{1}{\sigma} = \overset{1}{\sigma}{}^{kp} \overset{1}{\tau}_k \overset{1}{\tau}_p$ и вектором объемных сил $\overset{1}{F} = \overset{1}{F}{}^k \overset{1}{\tau}_k$, а второе – $\overset{2}{\tau}_k$, $\overset{2}{\sigma} = \overset{2}{\sigma}{}^{kp} \overset{2}{\tau}_k \overset{2}{\tau}_p$ и $\overset{2}{F} = \overset{2}{F}{}^k \overset{2}{\tau}_k$ соответственно.

Здесь и в дальнейшем по повторяющимся латинским индексам ведется суммирование от I до 3; индексы I и 2 над буквами указывают на отношение соответствующих функций к первому или второму состояниям.

Следуя [4], для рассматриваемых равновесных состояний запишем уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \overset{1}{\operatorname{div}}\, \overset{1}{\sigma} + \overset{1}{F} = 0 \\ \overset{2}{\operatorname{div}}\, \overset{2}{\sigma} + \overset{2}{F} = 0 \end{aligned} \qquad (I)$$

или, переходя к записи в скалярной форме, будем иметь

$$\overset{1}{\nabla}_r \overset{1}{\sigma}{}^{rp} + \overset{1}{F}{}^{p} = 0$$

$$\overset{2}{\nabla}_r \overset{2}{\sigma}{}^{rp} + \overset{2}{F}{}^{p} = 0, \qquad (2)$$

где ∇_r - ковариантная производная по координате x^r.

Введем добавочные тензор напряжений $\overset{12}{\sigma}$ и вектор объемных сил $\overset{12}{F}$ с компонентами

$$\overset{12}{\sigma}{}^{rp} = \overset{2}{\sigma}{}^{rp} - \overset{1}{\sigma}{}^{rp}$$

$$\overset{12}{F}{}^{p} = \overset{2}{F}{}^{p} - \overset{1}{F}{}^{p}. \qquad (3)$$

Здесь $\overset{12}{\sigma}{}^{kp}$, $\overset{1}{\sigma}{}^{kp}$ и $\overset{2}{\sigma}{}^{kp}$ - компоненты тензора, записанные в одних и тех же лагранжевых координатах x^k.

Подставляя (3) во второе уравнение (2), получим уравнения, которые в развернутом виде имеют вид

$$\frac{\partial \overset{1}{\sigma}{}^{rp}}{\partial x^r} + \overset{1}{\Gamma}{}^{r}_{rq} \overset{1}{\sigma}{}^{qp} + \overset{1}{\Gamma}{}^{p}_{rl} \overset{1}{\sigma}{}^{rl} + \overset{1}{F}{}^{p} = 0$$

$$\frac{\partial (\overset{1}{\sigma}{}^{rp} + \overset{12}{\sigma}{}^{rp})}{\partial x^r} + \overset{2}{\Gamma}{}^{r}_{rq} (\overset{1}{\sigma}{}^{qp} + \overset{12}{\sigma}{}^{qp}) + \overset{2}{\Gamma}{}^{p}_{rl} (\overset{1}{\sigma}{}^{rl} + \overset{12}{\sigma}{}^{rl}) + (\overset{1}{F}{}^{p} + \overset{12}{F}{}^{p}) = 0, \qquad (4)$$

где $\Gamma^{p}_{rl} = \frac{1}{2} g^{ps} \left(\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ls}}{\partial x^r} - \frac{\partial g_{rl}}{\partial x^s} \right)$ - символы Кристоффеля II рода; g_{rs}, g^{rs} -ко- и контравариантные компоненты метрического тензора.

Вычитая первое уравнение (4) из второго, найдем

$$\frac{\partial \overset{12}{\sigma}{}^{rp}}{\partial x^r} + \overset{2}{\Gamma}{}^{r}_{rq} \overset{12}{\sigma}{}^{qp} + \overset{2}{\Gamma}{}^{p}_{rl} \overset{12}{\sigma}{}^{rl} + (\overset{2}{\Gamma}{}^{r}_{rq} - \overset{1}{\Gamma}{}^{r}_{rq}) \overset{1}{\sigma}{}^{qp} + (\overset{2}{\Gamma}{}^{p}_{rl} - \overset{1}{\Gamma}{}^{p}_{rl}) \overset{1}{\sigma}{}^{rl} + \overset{12}{F}{}^{p} = 0$$

или

$$\overset{2}{\nabla}_r \overset{12}{\sigma}{}^{rp} + \overset{12}{F}{}^{p} + P^{r}_{rq} \overset{1}{\sigma}{}^{qp} + P^{p}_{rl} \overset{1}{\sigma}{}^{rl} = 0, \qquad (5)$$

здесь

$$P^{p}_{rl} = \overset{2}{\Gamma}{}^{p}_{rl} - \overset{1}{\Gamma}{}^{p}_{rl}. \qquad (6)$$

Первое слагаемое уравнения (5) представляет собой дивергенцию тензора добавочных напряжений Коши в деформированном состоянии. В предположении, что начальные напряжения $\overset{1}{\sigma}{}^{qp}$ в теле отсутствуют, из (5) получим обычное уравнение равновесия

$$\overset{2}{\nabla}_{r} \overset{12}{\sigma}{}^{rp} + \overset{12}{F}{}^{p} = 0. \qquad (7)$$

Слагаемое $\overset{r}{P}_{rq} \overset{1}{\sigma}{}^{qp} + \overset{p}{P}_{rl} \overset{1}{\sigma}{}^{rl}$, зависящее от напряжений исходного состояния и последующей деформации тела, представляет собой компоненты тензора первого ранга и соответствует добавлению к уравнению (7) величины, эквивалентной объемной силе.

Уравнение (5) неудобно для использования в решении задач, так как содержит в себе из-за ковариантного дифференцирования по базису второго состояния символы Кристоффеля $\overset{2}{\Gamma}{}^{p}_{rl}$.

Преобразуем первые два слагаемых к метрике состояния I. Для этого перепишем первые два члена уравнения (5) в векторном виде [I]

$$\frac{\partial}{\partial x^r}\left[\sqrt{\overset{2}{g}}\, \overset{12}{\sigma}{}^{rp} \overset{2}{\bar{r}}_p\right] + \sqrt{\overset{2}{g}}\, \overset{12}{\bar{F}}. \qquad (8)$$

Выражая далее базисный вектор второго состояния $\overset{2}{\bar{r}}_p$ через базистый вектор первого состояния $\overset{1}{\bar{r}}_p$ и вектор перемещения $\bar{u}$ [I,5]

$$\overset{2}{\bar{r}} = \overset{1}{\bar{r}}_n \left(\delta^n_p + \overset{1}{\nabla}_p u^n\right) \qquad (9)$$

и вводя несимметричный тензор напряжений Кирхгоффа

$$\overset{12}{\Sigma}{}^{rn} = \sqrt{\overset{2}{g} \cdot (\overset{1}{g})^{-1}}\, \overset{12}{\sigma}{}^{rp} \left(\delta^n_p + \overset{1}{\nabla}_p u^n\right), \qquad (10)$$

перепишем (8) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^r}\left[\sqrt{\overset{1}{g}}\, \overset{12}{\Sigma}{}^{rn} \overset{1}{\bar{r}}_n\right] + \sqrt{\overset{2}{g}}\, \overset{12}{\bar{F}}. \qquad (11)$$

В формулах (9) - (II) $\overset{i}{g} = |\overset{i}{g}_{kr}|$ - определитель матрицы компонентов метрического тензора (i = I,2), δ^k_p - символ Кронекера, u^k - компоненты вектора перемещения. Отношение определителей метрических тензоров равно

$$\overset{2}{g} (\overset{1}{g})^{-1} = 1 + 2\overset{12}{J}_1 + 4\overset{12}{J}_2 + 8\overset{12}{J}_3. \qquad (12)$$

Здесь $\overset{12}{J}_1$, $\overset{12}{J}_2$, $\overset{12}{J}_3$ - инварианты тензора деформации $\overset{12}{\varepsilon}_{kn}$ относительно преобразования лагранжевых координат:

$$\overset{12}{J}_1 = \overset{12}{\varepsilon}{}^{k}_{k}$$

$$\overset{12}{J}_2 = \frac{1}{2}\left(\overset{12}{J}{}_1^2 - \overset{12}{\varepsilon}{}^k_n \overset{12}{\varepsilon}{}^n_k\right) \qquad (13)$$

$$\overset{12}{J}_3 = \mathrm{Det}\,\|\overset{12}{\varepsilon}{}^k_n\| .$$

Объемная сила $\overset{12}{\overline{F}}$ выражается через массовую силу $\overset{12}{\overline{M}}$ и плотность $\overset{2}{\rho}$ следующим образом:

$$\overset{12}{\overline{F}} = \overset{2}{\rho}\,\overset{12}{\overline{M}} . \qquad (14)$$

Учитывая уравнение неразрывности

$$\overset{1}{\rho}\sqrt{\overset{1}{g}} = \overset{2}{\rho}\sqrt{\overset{2}{g}} , \qquad (15)$$

последний член уравнения (11) запишем в метрике первого состояния

$$\sqrt{\overset{2}{g}}\,\overset{12}{\overline{F}} = \sqrt{\overset{1}{g}}\,\overset{1}{\rho}\,\overset{12}{\overline{M}} = \sqrt{\overset{1}{g}}\,\overset{12}{\overline{f}} . \qquad (16)$$

Здесь $\overset{12}{f}$ - изменение объемной силы, отнесенное к базису первого состояния.

Переходя в выражении (11) к скалярной форме и учитывая (16), окончательно будем иметь

$$\overset{1}{\nabla}_{\imath} \overset{12}{\Sigma}{}^{\imath p} + \overset{12}{f}{}^{p} . \qquad (17)$$

В этой записи не содержится метрики второго состояния. Для преобразования второй пары слагаемых уравнения (5) рассмотрим символы Кристоффеля I рода

$$\overset{2}{\Gamma}_{k\imath,n} = \overset{2}{g}_{pn}\overset{2}{\Gamma}{}^{p}_{k\imath} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overset{2}{g}_{\imath n}}{\partial x^{k}} + \frac{\partial \overset{2}{g}_{kn}}{\partial x^{\imath}} - \frac{\partial \overset{2}{g}_{\imath k}}{\partial x^{n}}\right), \qquad (18)$$

где

$$\overset{2}{g}_{kn} = 2\overset{12}{\varepsilon}_{kn} + \overset{1}{g}_{kn} , \qquad (19)$$

$\overset{12}{\varepsilon}_{kn}$ - компоненты тензора деформаций.

Подставляя (19) в (18) и вычитая символы Кристоффеля первого состояния из полученного выражения, запишем

$$\overset{2}{\Gamma}_{k\imath,n} - \overset{1}{\Gamma}_{k\imath,n} = \frac{\partial \overset{12}{\varepsilon}_{kn}}{\partial x^{\imath}} + \frac{\partial \overset{12}{\varepsilon}_{\imath n}}{\partial x^{k}} - \frac{\partial \overset{12}{\varepsilon}_{k\imath}}{\partial x^{n}} . \qquad (20)$$

Но, с другой стороны, имеем

$$\frac{\partial \overset{12}{\varepsilon}_{kn}}{\partial x^{\imath}} = \overset{1}{\nabla}_{\imath}\overset{12}{\varepsilon}_{kn} + \overset{1}{\Gamma}{}^{n}_{k\imath}\overset{12}{\varepsilon}_{mn} + \overset{1}{\Gamma}{}^{p}_{\imath n}\overset{12}{\varepsilon}_{pk} \qquad (21)$$

и еще два равенства, получающиеся циклической перестановкой индексов в (21). Подставляя далее эти выражения в (20), после преобразования запишем

$$\overset{2}{\Gamma}_{k\tau,n} - \overset{1}{\Gamma}_{k\tau,n} = P_{k\tau,n} + 2\overset{1}{\Gamma}{}^{m}_{k\tau}\,\overset{12}{\varepsilon}_{mn}\,, \tag{22}$$

где

$$P_{k\tau,n} = \overset{1}{\nabla}_k \overset{12}{\varepsilon}_{\tau n} + \overset{1}{\nabla}_\tau \overset{12}{\varepsilon}_{kn} - \overset{1}{\nabla}_n \overset{12}{\varepsilon}_{k\tau}\,. \tag{23}$$

Запись (22) тождественна следующему выражению:

$$P^{p}_{k\tau} = \overset{2}{\Gamma}{}^{p}_{k\tau} - \overset{1}{\Gamma}{}^{p}_{k\tau} = \overset{2}{g}{}^{qp} P_{k\tau,q}\,. \tag{24}$$

Действительно, умножая (24) на $\overset{2}{g}_{np} = 2\overset{12}{\varepsilon}_{np} + \overset{1}{g}_{np}$, получим

$$\overset{2}{\Gamma}_{k\tau,n} - \overset{1}{\Gamma}_{k\tau,n} = 2\overset{1}{\Gamma}{}^{p}_{k\tau}\,\overset{12}{\varepsilon}_{np} + P_{k\tau,q}\,\overset{2}{g}{}^{qp}\,\overset{2}{g}_{np}\,. \tag{25}$$

Учитывая, что $\overset{2}{g}{}^{qp}\cdot\overset{2}{g}_{np} = \delta^{q}_{n}$, придем к выражению (22). Компоненты $\overset{2}{g}{}^{qp}$ определяются как элементы матрицы, обратной матрице с компонентами $\overset{1}{g}_{qp} + 2\overset{12}{\varepsilon}_{qp}$:

$$\|\overset{2}{g}{}^{qp}\| = \|\overset{1}{g}_{qp} + 2\overset{12}{\varepsilon}_{qp}\|^{-1}. \tag{26}$$

Используя выражения (17), (24) и аналогичные выражения для $P^{\tau}_{\tau q}$ в уравнении (5), перепишем его в окончательном виде:

$$\overset{1}{\nabla}_\tau \overset{12}{\Sigma}{}^{\tau p} + \overset{12}{f}{}^{p} + P_{\tau\ell,q}\,\overset{2}{g}{}^{qp}\,\overset{1}{\sigma}{}^{\tau\ell} + P_{\tau q,n}\,\overset{2}{g}{}^{n\tau}\,\overset{1}{\sigma}{}^{qp} = 0 \tag{27}$$

Таким образом, получено уравнение равновесия, записанное с учетом (26) в метрике первого состояния.

Функции $P_{\tau\ell,q}$, выраженные в (23) через компоненты деформации, при решении задач в перемещениях удобнее представить в ином виде.

Продифференцируем (9) по координате x^{τ}:

$$\overset{2}{\tau}_{k\tau} = \overset{1}{\tau}_{\ell\tau}(\delta^{\ell}_{k} + \overset{1}{\nabla}_k u^{\ell}) + \overset{1}{\tau}_{\ell}\,\frac{\partial}{\partial x^{\tau}}(\delta^{\ell}_{k} + \overset{1}{\nabla}_k u^{\ell}). \tag{28}$$

Затем скалярно перемножая выражения (9) и (28) и учитывая (22), будем иметь

$$P_{k\tau,n} = \overset{1}{g}_{p\ell}(\delta^{p}_{n} + \overset{1}{\nabla}_n u^{p})\,\overset{1}{\nabla}_k \overset{1}{\nabla}_\tau u^{\ell}. \tag{29}$$

Если в выражении (29) поднять индекс n при помощи $\overset{2}{g}{}^{np}$, то получим выражение (24).

Условия совместности конечных деформаций упругого тела можно записать в виде [5]

$$\overset{2}{R}_{nm\ell k} = \frac{\partial P_{k\ell,n}}{\partial x^m} - \frac{\partial P_{k\ell,m}}{\partial x^n} + \overset{2}{g}{}^{\tau p}\left[P_{p\ell,m}P_{\tau k,n} - P_{p\ell,n}P_{\tau k,m}\right] = 0, \quad (30)$$

где

$$P_{p\ell,m} = \overset{1}{\nabla}_p \overset{12}{\varepsilon}_{\ell m} + \overset{1}{\nabla}_\ell \overset{12}{\varepsilon}_{pm} - \overset{1}{\nabla}_m \overset{12}{\varepsilon}_{p\ell},$$

$R_{nm\ell k}$ – тензор Римана-Кристоффеля.

При всевозможных значениях индексов n, m, ℓ, k из набора I,2,3 система уравнений (30) состоит всего из шести независимых уравнений. Эти шесть уравнений соответствуют комбинациям индексов ($n m \ell k$ = I2I2,I3I3,2323,I2I3,2I23,3I32).

Для решения задач в перемещениях найдем шесть соотношений Коши между приращениями компонентов тензора деформаций Коши-Грина $\overset{12}{\varepsilon}_{\tau k}$ и компонентами вектора перемещений u_k.

Для этого составим скалярное произведение базисных векторов (9)

$$\overset{2}{\tau}_\tau \cdot \overset{2}{\tau}_k = \overset{1}{\tau}_n \cdot \overset{1}{\tau}_p (\delta^n_\tau + \overset{1}{\nabla}_\tau u^n)(\delta^p_k + \overset{1}{\nabla}_k u^p) \quad (31)$$

или

$$\overset{2}{g}_{\tau k} = \overset{1}{g}_{\tau k} + 2\overset{12}{\varepsilon}_{\tau k}, \quad (32)$$

где

$$2\overset{12}{\varepsilon}_{\tau k} = \overset{1}{\nabla}_\tau u_k + \overset{1}{\nabla}_k u_\tau + \overset{1}{\nabla}{}^p u_\tau \overset{1}{\nabla}_p u_k. \quad (33)$$

Последнее выражение представляет собой шесть геометрических соотношений Коши в произвольных криволинейных координатах.

Физические соотношения между приращениями компонентов тензора напряжений Кирхгоффа $\overset{12}{\Sigma}{}^{k\tau}$ и соответствующими приращениями компонентов тензора деформаций Коши-Грина $\overset{12}{\varepsilon}_{mn}$ можно записать в виде обобщенного закона Гука:

$$\overset{12}{\Sigma}{}^{k\tau} = A^{k\tau mn} \overset{12}{\varepsilon}_{mn}, \quad (34)$$

здесь $A^{k\tau mn}$ – компоненты тензора четвертого ранга, характеризующего свойства материала деформируемого тела.

Запись кинематических граничных условий на поверхности S_u деформированного тела не будет отличаться от аналогичных условий теории упругости:

$$u_{k/s_u} = f_k(x^n) \quad (n = 1, 2, 3). \tag{35}$$

Статические граничные условия получим, используя равенство тензора напряжений Коши $\mathfrak{S}$ на произвольной площадке с нормалью $\bar{n}$ вектору внешней нагрузки $\bar{T}$ на этой же площадке. Эти соотношения для двух состояний среды запишем в виде, [4] .

для состояния 1

$$\overset{1}{\mathfrak{S}} \cdot \overset{1}{\bar{n}} = \overset{1}{\bar{T}} \quad \text{или} \quad \overset{1}{\mathfrak{S}}{}^{k\tau} \overset{1}{n}_\tau = \overset{1}{T}{}^k. \tag{36}$$

для состояния 2

$$\overset{2}{\mathfrak{S}} \cdot \overset{2}{\bar{n}} = \overset{2}{\bar{T}} \quad \text{или} \quad \overset{2}{\mathfrak{S}}{}^{k\tau} \overset{2}{n}_\tau = \overset{2}{T}{}^k. \tag{37}$$

Здесь n_τ - ковариантные компоненты орта внешней нормали к поверхности тела. Так как вид поверхности в состоянии 2 подлежит определению, выразим компоненты внешней нормали $\overset{2}{\bar{n}}$ через компоненты внешней нормали $\overset{1}{\bar{n}}$ к поверхности тела в состоянии I.

Следуя работе [3], зависимость между $\overset{2}{\bar{n}}$ и $\overset{1}{\bar{n}}$ представим в виде

$$\overset{2}{\bar{n}} = \frac{\overset{2}{\bar{\tau}}_p \overset{1}{n}{}^p}{1 + \overset{12}{e}}, \tag{38}$$

где $\overset{12}{e}$ - относительное удлинение в направлении $\overset{1}{\bar{n}}$, а

$$\overset{1}{n}{}^p = \overset{1}{\bar{n}} \cdot \overset{1}{\bar{\tau}}{}^p. \tag{39}$$

Ковариантные составляющие вектора $\overset{2}{\bar{n}}$ на координатные оси x^z во втором состоянии среды будут

$$\overset{2}{n}_\tau = \frac{\overset{2}{g}_{p\tau} \overset{1}{n}{}^p}{1 + \overset{12}{e}} = \frac{\overset{2}{g}_{p\tau} \overset{1}{g}{}^{p\ell} \overset{1}{n}_\ell}{1 + \overset{12}{e}} \tag{40}$$

Подставим (40) во вторую формулу (37) и, полагая, что

$$\overset{2}{T}{}^k = \overset{1}{T}{}^k + \overset{12}{T}{}^k, \quad \overset{2}{\mathfrak{S}}{}^{k\tau} = \overset{1}{\mathfrak{S}}{}^{k\tau} + \overset{12}{\mathfrak{S}}{}^{k\tau}, \quad \text{получим}$$

$$\left[\overset{1}{\mathfrak{S}}{}^{k\tau} + \overset{12}{\mathfrak{S}}{}^{k\tau}\right] \frac{\overset{2}{g}_{p\tau} \overset{1}{g}{}^{p\ell} \overset{1}{n}_\ell}{1 + \overset{12}{\ell}} = \overset{1}{T}{}^k + \overset{12}{T}{}^k \tag{41}$$

Составим разность выражения (41) и (36) и, учитывая (10), после преобразования получим

$$\frac{\overset{1}{n}_\ell}{1 + \overset{12}{e}} \left[\overset{1}{\mathfrak{S}}{}^{k\tau} \left(2 \overset{12}{\varepsilon}{}^\ell_\tau - \delta^\ell_\tau \overset{12}{e}\right) + \sqrt{\overset{1}{g} (\overset{2}{g})^{-1}} \, \overset{12}{\Sigma}{}^{kp} \left(\delta^\ell_m + \overset{1}{\nabla}_m u^\ell\right)\right] = \overset{12}{T}{}^k \tag{42}$$

Это равенство выражает условия для приращения нагрузки на поверхности тела во втором, деформированном состоянии.

Итак, получена система дифференциальных уравнений в произвольных криволинейных координатах для решения задач теории упругости с начальными напряжениями при конечных перемещениях точек тела. При решении задач теории упругости в перемещениях имеем шесть уравнений равновесия (27), шесть соотношений Коши (33), шесть физических соотношений (для несимметричных тензоров) (34). Всего I8 уравнений, записанных в координатах исходного состояния. В эти уравнения входят I8 неизвестных: 9 компонент тензора дополнительных напряжений Кирхгоффа $\overset{12}{\Sigma}{}^{k\tau}$. 6 компонент тензора деформаций Коши $\overset{12}{\varepsilon}{}^{k\tau}$ и 3 компонента вектора перемещений u^k.

Для решения задач теории упругости в деформациях необходимо использовать девять независимых уравнений равновесия и совместности деформаций (27, 30) с шестью физическими соотношениями (34). Следовательно, имеем I5 уравнений с I5 неизвестными (9 компонент тензора дополнительных напряжений Кирхгоффа $\overset{12}{\Sigma}{}^{k\tau}$ и 6 компонент тензора деформаций Коши $\overset{12}{\varepsilon}{}^{k\tau}$).

В итоге получены замкнутые системы уравнений теории упругости для двух основных методов решения.

Литература

I. Галимов К.З. К теории конечных деформаций. Ученые записки КГУ, т. I09, кн. I, I949.

2. Галимов К.З. О некоторых задачах теории упругости при произвольных смещениях. Ученые записки КГУ, т. II2, I952.

3. Кутилин Д.И. Теория конечных деформаций. Гостехиздат. I947.

4. Лурье А.И. Теория упругости. "Наука", I970.

5. Седов Л.И. Механика сплошной среды, том. I, "Наука", I970 .