КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им С. П. КОРОЛЕВА
Труды, выпуск 48. 1971 г.
Вопросы прочности элементов авиационных конструкций

С. И. Иванов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОВЕРХНОСТНОМ СЛОЕ ЦИЛИНДРА

Постановка задачи

Рассматриваются остаточные напряжения в цилиндре, когда ричина возникновения их одинакова во всех сечениях и не зависит от координаты Θ (фиг. 1). В качестве примера можно сослаться на поле остаточных напряжений в цилиндрической детали, наведенное точением. В таком случае, как это следует из условий равновесия [1],

$$\tau^0_{rz} = \tau^0_{r\Theta} = 0.$$

Подлежат определению следующие напряжения:

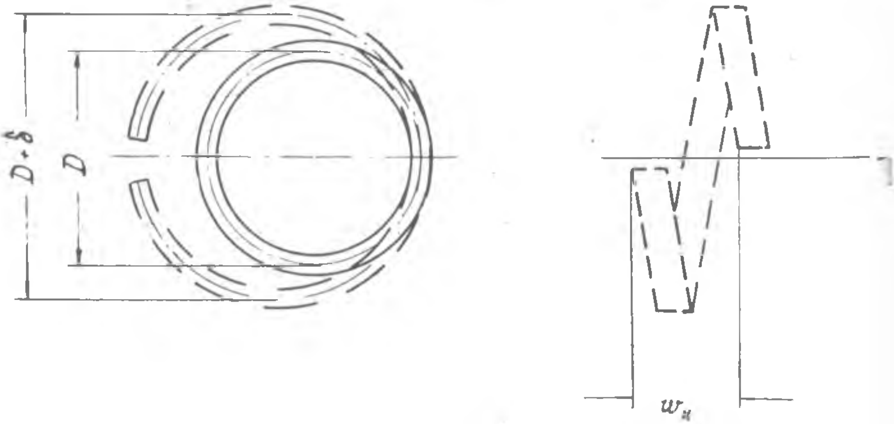
$$\sigma^0_r(r), \quad \sigma^0_\Theta(r), \quad \sigma^0_z(r), \quad \tau^0_{\Theta z}(r).$$

Данная задача рассматривалась в работе [1], где разработан метод определения остаточных напряжений с использованием идеи Г. Закса.

Если существенные остаточные напряжения локализованы в тонком поверхностном слое детали, то указанный метод неприменим, так как измеряемые деформации и перемещения оказыва-

Фиг. 1.

ются весьма малыми. Для преодоления этого затруднения Н. Н. Давиденков предложил предварительную разрезку цилиндра по образующей с последующим снятием слоев [2]. Измеряемые пе ремещения оказываются в этом случае достаточно большими могут регистрироваться с необходимой точностью. Н. Н. Давиде ковым рассматривался частный случай, когда $\tau^0_{\Theta z}=0$.



Фиг. 2.

В настоящей статье разбирается общий случай в изложенно выше постановке. В первую очередь следует произвести расточк цилиндра до минимально возможной толщины, при этом он пр вращается в тонкостенную трубу. К напряжениям, действующи в цилиндре, добавляются дополнительные напряжения, являющ еся результатом расточки. Метод определения их изложен в р боте [1]. Далее рассматриваются остаточные напряжения труб

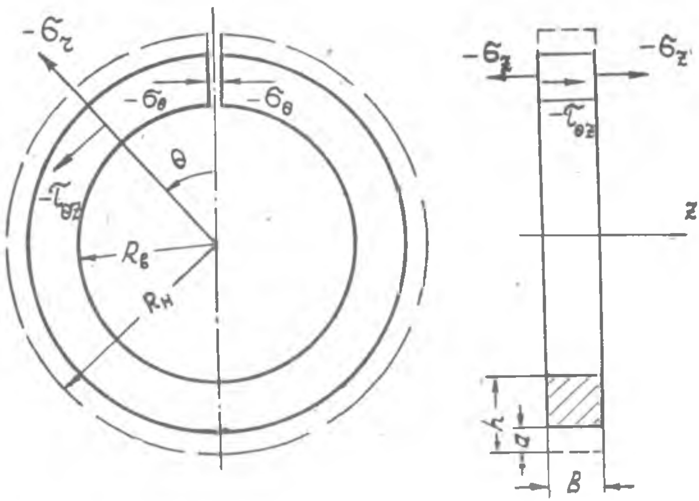
$$\sigma_r(r),\ \sigma_\Theta(r),\ \sigma_z(r) \text{ и } \tau_{\Theta z}(r),\ (\tau_{rz}=\tau_{r\Theta}=0,)$$

для определения которых применяется метод колец и полосок [3 При исследовании кольца регистрируется изменение диаметра δ взаимное смещение концов $w_к$ вдоль оси Z в результате разрезк и последующего снятия слоев (фиг. 2). Для определения свя между указанными перемещениями и остаточными напряжениям трубы рассмотрим нагружение кольца, эквивалентное вырезке трубы, разрезке и снятию наружного слоя толщиной a (фиг. 3)

По боковым поверхностям, перпендикулярным оси z, приложе напряжения $-\sigma_z$ и $-\tau_{\Theta z}$, на наружной цилиндрической поверхности напряжение $-\sigma_r$, по торцам кольца в плоскости разрезки—напряж ния $-\sigma_\Theta$ и $-\tau_{\Theta z}$.

Эта система сил вызывает перемещения δ и $w_к$, регистриру мые в процессе исследования кольца. При исследовании полоски определяется прогиб f, который полоска получает в результате вы резки из трубы и последующего снятия слоев. Задача об исследовании полоски подробно разбирается в работах [3, 4, 5], откуда в дальнейшем будут заимствованы окончательные результаты. Задача же исследования кольца требует подробного рассмотрения.

Усилия, изображенные на фиг. 3, можно разбить на две группы: нормальные силы и касательные силы. Каждая из этих групп самоуравновешена, что позволяет рассматривать их раздельно, а к полученным результатам применить принцип суперпозиции.



Фиг. 3.

Перемещения кольца от нормальных сил

Представим изменение диаметра кольца в виде суммы

$$\delta = \delta_b + \delta_c, \tag{1}$$

где δ_b — перемещение от сил $-\sigma_z$;

δ_c — перемещение от сил $-\sigma_\Theta$ и $-\sigma_r$.

При определении δ учтем, что высота сечения кольца h заметно меньше диаметра. Это обстоятельство позволяет применить к исследованию кольца результаты, полученные для прямого бруса. Представим σ_z как сумму трех слагаемых:

$$\sigma_z = \sigma_{z1} + \sigma_{z2} + \sigma_{z3}, \tag{2}$$

где

$$\sigma_{z1} = \frac{1}{h-a}\int\limits_{R_в}^{R_н-a} \sigma_z\,dr, \quad \sigma_{z2} = \frac{12\,[r-R\,(a)]}{(h-a)^3}\int\limits_{R_в}^{R_н-a} [r-R\,(a)]\,\sigma_z dr.$$

Через $R(a)$ обозначен радиус оси кольца без слоя толщиной a:

$$R(a) = \frac{1}{2}(R_н - a + R_в). \tag{3}$$

Напряжение σ_{z3} в пределах высоты сечения самоуравновешено, т. е.

$$\int_{R_в}^{R_н - a} \sigma_{z3} dr = 0, \quad \int_{R_в}^{R_н - a} [r - R(a)] \sigma_{z3} dr = 0.$$

При таком нагружении любой участок кольца, рассматриваемый как прямой брус, находится в условиях плоской деформации [5]. Следовательно, нагружение $-\sigma_{z3}$ не изменяет диаметр кольца.

Перемещение от $-\sigma_{z2}$ значительно больше перемещения от $-\sigma_{z1}$, так как первое вызывает деформацию изгиба, а второе — поперечную деформацию, сопутствующую центральному растяжению. В итоге, при определении δ_b следует рассматривать только $-\sigma_{z2}$. Применяя к исследованию нагружения теорию прямого бруса, получим следующее выражение для окружной деформации:

$$\varepsilon_\Theta = \mu \frac{12[r - R(a)]}{E(h-a)^3} \int_{R_в}^{R_н - a} [r - R(a)] \sigma_z dr.$$

Здесь учтено, что напряжения $-\sigma_{z2}$ передаются через кольцо не изменяясь, и в любой точке кольца имеет место линейное напряженное состояние. Эти закономерности следуют из точного решения теории упругости для прямого бруса. Изменение кривизны оси кольца определяется через относительную деформацию наружного волокна:

$$\frac{1}{R(a) + \frac{1}{2}\delta_b} - \frac{1}{R(a)} = \frac{2\varepsilon_\Theta}{h - a} = \mu \frac{12}{E(h-a)^3} \int_{R_в}^{R_н - a} [r - R(a)] \sigma_z dr.$$

Отсюда, с учетом малости перемещений, получим:

$$\delta_b = -\mu \frac{24R^2(a)}{E(h-a)^3} \int_{R_в}^{R_н - a} [r - R(a)] \sigma_z dr. \tag{4}$$

Для определения δ_c обращаемся к фиг. 3.

Вычислим изгибающий момент в произвольном сечении кольца, положение которого определяется углом Θ:

$$M = b \int_{R_в}^{R_н - a} [r - R(a)\cos\Theta] \sigma_\Theta dr - b \int_0^\Theta R(a)(R_н - a) \sigma_r \sin(\Theta - \psi) d\psi.$$

Из уравнения равновесия вытекает следующее соотношение:

$$\sigma_r = \frac{1}{R_н - a} \int\limits_{R_в}^{R_н - a} \sigma_\Theta \, dr. \tag{5}$$

С учетом этого выражения, после преобразований получим:

$$M = b \int\limits_{R_в}^{R_н - a} [r - R(a)] \, \sigma_\Theta \, dr.$$

Используем известную формулу для изменения кривизны оси кольца:

$$\frac{1}{R(a) + \frac{1}{2}\delta_c} - \frac{1}{R(a)} = -\frac{M}{EI} = -\frac{12}{E(h-a)^3} \int\limits_{R_в}^{R_н - a} [r - R(a)] \, \sigma_\Theta \, dr.$$

Отсюда следует выражение для искомого малого перемещения:

$$\delta_c = \frac{24 R^2(a)}{E(h-a)^3} \int\limits_{R_в}^{R_н - a} [r - R(a)] \, \sigma_\Theta \, dr. \tag{6}$$

Суммируя полученные выражения для перемещений в соответствии с формулой (1), получим:

$$\delta = \frac{24 R^2(a)}{E(h-a)^3} \int\limits_{R_в}^{R_н - a} [r - R(a)] (\sigma_\Theta - \mu\sigma_z) \, dr. \tag{7}$$

Данная формула выражает связь между остаточными напряжениями в трубе и изменением диаметра кольца и является окончательной, так как ниже показано, что вторая группа сил — касательные усилия, не вызывает изменения диаметра.

Второе перемещение $w_к$ при нагружении нормальными силами отсутствует. Перемещение δ можно измерять на внутреннем диаметре кольца, что практически не скажется на окончательных результатах ввиду малых размеров сечения кольца сравнительно с диаметром.

Перемещения кольца от касательных сил

Нагружение кольца касательными силами изображено на фиг. 3. Особенность этого нагружения заключается в том, что нагрузки во всех сечениях кольца одинаковы и изменяются только вдоль контура сечения. Данная задача имеет сходство с проблемой Митчелла для прямого бруса.

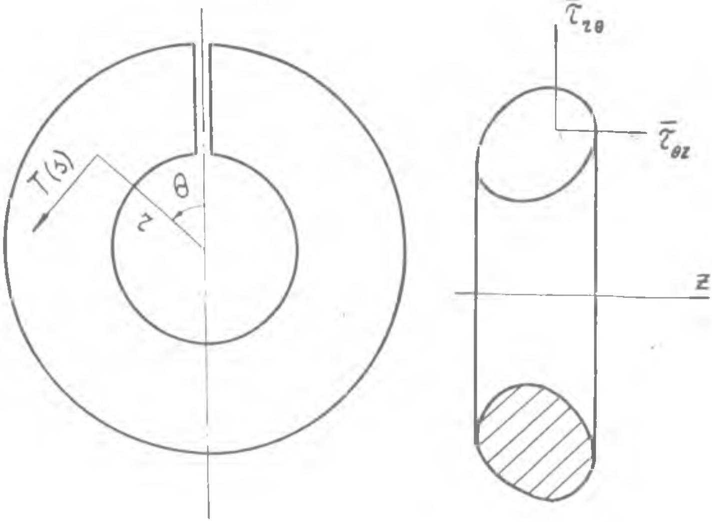
Рассмотрим эту задачу в наиболее общей постановке. На фиг. 4 изображено разрезанное кольцо произвольного поперечного сечения, нагруженное на боковой поверхности окружными касательными силами, которые изменяются только вдоль контура сечения.

Нагрузка, действующая на кольцо, самоуравновешена, т. е.

$$\oint r^2 T(s)\,ds = 0. \qquad (8$$

По поверхностям разреза кольца также приложены касательны усилия. Условия, которым они удовлетворяют, рассматриваются ниже. Частным случаем этой задачи является нагружение каса тельными силами, изображенное на фиг. 3. Ищем решение задачи в следующей форме:

$$\bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_\Theta = \bar{\sigma}_z = \bar{\tau}_{rz} = 0; \quad \bar{\tau}_{r\Theta} = \bar{\tau}_{r\Theta}(r, z); \quad \bar{\tau}_{\Theta z} = \bar{\tau}_{\Theta z}(r, z).$$



Фиг. 4.

Выразим $\bar{\tau}_{r\theta}$ и $\bar{\tau}_{\Theta z}$ через функцию напряжения:

$$\bar{\tau}_{r\Theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad \bar{\tau}_{\Theta z} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial r}, \qquad (9$$

где $\varphi = \varphi(r, z)$.

Подставив эти выражения в уравнения равновесия и неразрывности деформаций, получим уравнение для определения функции напряжения:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} - \frac{3}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = C. \qquad (1$$

Рассмотрим условие равновесия на боковой поверхности кольц

$$\bar{\tau}_{r\Theta} n_1 + \bar{\tau}_{\Theta z} n_3 = T(s).$$

Выразив напряжения через φ, а направляющие косинусы нормал через координаты контура сечения, получим:

$$\frac{d\varphi}{ds} = r^2 T(s).$$

Отсюда следует выражение для функции напряжения на контуре сечения:

$$\varphi(s) = \int_0^s r^2 T(s_1)\, ds_1. \tag{11}$$

На основании (8) $\varphi(s)$ является однозначной функцией. Усилия, которые должны быть приложены к торцу кольца, приведем к точке на оси Z. В этом случае следует вычислить Q_z, Q_r и M:

$$Q_z = \iint \bar{\tau}_{\Theta z}\, dz\, dr = \iint \frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial r} dz\, dr = \iint \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\varphi}{r^2}\right) dz\, dr + $$
$$+ 2\iint \frac{\varphi}{r^3} dz\, dr = 2\iint \frac{\varphi}{r^3}\, dz\, dr - \oint \frac{\varphi}{r^2}\, dz; \tag{12}$$

$$Q_r = \iint \bar{\tau}_{r\Theta}\, dz\, dr = -\iint \frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\, dz\, dr = -\oint rT(s)\, ds; \tag{13}$$

$$M = \iint \left(z\bar{\tau}_{r\Theta} - r\bar{\tau}_{\Theta z}\right) dz\, dr = -\iint \left(\frac{z}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) dz\, dr =$$
$$= -\oint zrT(s)\, ds. \tag{14}$$

Выражения (12)—(14) следует рассматривать как условия равновесия на торцах кольца в смысле Сен-Венана. В результате интегрирования уравнений для перемещений получим следующие выражения:

$$u = 0, \quad v = v(z, r), \quad w = n\Theta. \tag{15}$$

Отсюда следует, что касательные силы не вызывают изменения диаметра кольца.

На основании (15) устанавливается смысл постоянной в уравнении (10).

$$C = -2Gn. \tag{16}$$

Следует заметить, что полученное решение справедливо при вполне определенных усилиях на торцах Q_r и M, величина которых определяется по формулам (13) и (14) через нагрузку на боковой поверхности кольца. Осевая составляющая торцевых сил Q_z может принимать любое значение. В зависимости от ее величины находится постоянная n, величина которой определяется по уравнению (12).

Рассмотренное решение справедливо как для разрезанного, так и для замкнутого кольца. В последнем случае перемещения не должны зависеть от Θ, т. е.

$$n = 0 \text{ и } w = 0. \tag{17}$$

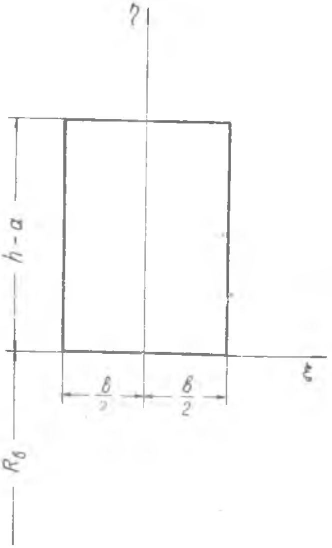
Применим полученные результаты для определения перемещения кольца $w_к$. Касательную нагрузку представим как сумму двух слагаемых:

$$\tau_{\Theta z} = \tau_{\Theta z1} + \tau_{\Theta z2},$$

где

$$\tau_{\Theta z1} = \frac{4r}{(R_{\text{н}} - a)^4 - R_{\text{в}}^4} \int\limits_{R_{\text{в}}}^{R_{\text{н}}-a} r^2 \tau_{\Theta z}\, dr; \tag{18}$$

$$\tau_{\Theta z2} = \tau_{\Theta z} - \frac{4r}{(R_{\text{н}} - a)^4 - R_{\text{в}}^4} \int\limits_{R_{\text{в}}}^{R_{\text{н}}-a} r^2 \tau_{\Theta z}\, dr. \tag{19}$$



Фиг. 5.

Нетрудно показать, что при нагружении (18) осевое смещение концов кольца отсутствует. В дальнейшем остается рассмотреть действие второго слагаемого усилия.

Будем решать задачу в новой системе осей ξ, η (фиг. 5).

$$\xi = z, \quad \eta = r - R_{\text{в}}. \tag{20}$$

Уравнение (10) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} - \frac{3}{R_в + \eta}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = -2Gn.$$

В нашем случае, когда $R_{\text{в}} \gg h$,

$$R_{\text{в}} + \eta \approx \frac{R_{\text{в}} + R_{\text{н}}}{2} = R.$$

Уравнение задачи несколько упрощается.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} - \frac{3}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = -2Gn. \tag{21}$$

Применяя метод Фурье, получаем

$$\varphi = -Gn\left(\xi^2 - \frac{b^2}{4}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k \frac{\operatorname{ch}\alpha_k \xi}{\operatorname{ch}\alpha_k \frac{b}{2}} e^{\frac{3}{2R}\eta} \sin\sqrt{\alpha_k^2 - \left(\frac{3}{2R}\right)^2}\,\eta + \right.$$

$$\left. + B_k \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\beta_k^2 + \left(\frac{3}{2R}\right)^2}\left(\eta - \frac{h-a}{2}\right)}{\operatorname{ch}\beta_k \frac{h-a}{2}} e^{\frac{3}{2R}\left(\eta - \frac{h-a}{2}\right)} \sin\beta_k\left(\xi + \frac{b}{2}\right)\right].$$

В дальнейшем положим

$$\alpha_k = k\frac{\pi}{h-a}, \quad \beta_k = k\frac{\pi}{b}.$$

Учитывая, что размеры поперечного сечения кольца малы сравнительно с диаметром, получим:

$$\varphi = -Gn\left(\xi^2 - \frac{b^2}{4}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k \frac{\operatorname{ch}\alpha_k \xi}{\operatorname{ch}\alpha_k \frac{b}{2}} \sin \alpha_k \eta + \right.$$

$$\left. + B_k \frac{\operatorname{ch}\beta_k\left(\eta - \frac{h-a}{2}\right)}{\operatorname{ch}\beta_k \frac{h-a}{2}} \sin\beta_k\left(\xi + \frac{b}{2}\right)\right]. \qquad (22)$$

Рассмотрим условие на контуре сечения. В нашем случае:

$$T(s)|_{\eta=0} = T(s)|_{\eta=h-a} = 0, \quad T(s)|_{\xi=\frac{b}{2}} = -\tau_{\Theta z2},$$

$$T(s)|_{\xi=-\frac{b}{2}} = \tau_{\Theta z2}.$$

Для определения $\varphi(s)$ применим формулу (11):

$$\varphi(s) = \int_0^s (R_\text{в} + \eta)^2 T(s_1)\, ds_1 \approx R^2 \int_0^s T(s_1)\, ds_1.$$

За начало отсчета s принимаем точку на нижней стороне сечения. Учтем, что при $R_\text{в} \gg h$ из выражения (19) следует:

$$\tau_{\Theta z2} = \tau_{\Theta z} - \frac{1}{h-a}\int_0^{h-a} \tau_{\Theta z}\, d\eta_1. \qquad (23)$$

Результаты вычисления функции напряжения на контуре:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(s)|_{\xi=\pm\frac{a}{2}} &= -R^2\left(\int_0^{\eta} \tau_{\Theta z}\, d\eta_1 - \frac{\eta}{h-a}\int_0^{h-a} \tau_{\Theta z}\, d\eta\right) \\ \varphi(s)|_{\eta=0} &= \varphi(s)|_{\eta=h-a} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

В решении (22) определим постоянные $A_к$ и $B_к$ так, чтобы удовлетворить условиям (24). Рассматривая вертикальные стороны сечения кольца, получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\alpha_k\eta = -R^2\left(\int_0^{\eta} \tau_{\Theta z}\, d\eta_1 - \frac{\eta}{h-a}\int_0^{h-a} \tau_{\Theta z}\, d\eta\right).$$

Разложив правую часть в ряд по $\sin \alpha_к\eta$ и сравнивая соответствующие коэффициенты левой и правой части, приходим к следующему результату:

$$A_k = -\frac{2R^2}{k\pi}\int_0^{h-a} \tau_{\Theta z} \cos\alpha_k\eta\, d\eta.$$

Далее удовлетворим условиям на горизонтальных сторонах сече-ния

$$-Gn\left(\xi^2-\frac{b^2}{4}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\sin\beta_k\left(\xi+\frac{b}{2}\right)=0.$$

Представим первое слагаемое в виде ряда:

$$-Gn\left(\xi^2-\frac{b^2}{4}\right)=\sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{8Gnb^2}{k^3\pi^3}\sin\beta_k\left(\xi+\frac{b}{2}\right). \qquad (2$$

Сравнение коэффициентов, дает:

$$B_k=-\frac{8Gnb^2}{k^3\pi^3} \text{ — для нечетного } k,$$

$$B_k=0 \qquad \text{ — для четного } k.$$

Учитывая полученные значения постоянных и разложение (25 приходим к окончательному выражению для функции напряже-ния:

$$\varphi=-\frac{2R^2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\,\frac{\operatorname{ch}\alpha_k\xi}{\operatorname{ch}\alpha_k\frac{b}{2}}\sin\alpha_k\eta\int_0^{h-a}\tau_{\Theta z}\cos\alpha_k\eta\,d\eta+$$

$$+\frac{8Gnb^2}{\pi^3}\sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{k^3}\left[1-\frac{\operatorname{ch}\beta_k\left(\eta-\frac{h-a}{2}\right)}{\operatorname{ch}\beta_k\frac{h-a}{2}}\right]\sin\beta_k\left(\xi+\frac{b}{2}\right). \qquad (2$$

Зная функцию напряжения, можно приступить к определени постоянной n, через которую определяется осевое смещение w

Получим соотношения, аналогичные выражениям (12)÷(14 применительно к случаю тонкого кольца, которое здесь рассма-ривается.

Для тонкого кольца формулы (9) принимают следующий вид:

$$\bar{\tau}_{r\Theta}=-\frac{1}{R^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi},\quad \bar{\tau}_{\Theta z}=\frac{1}{R^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}. \qquad (2$$

Усилия, которые должны действовать на торце, приведем к нача координат (фиг. 5):

$$Q_\eta=\iint\bar{\tau}_{r\Theta}\,d\xi\,d\eta=-\frac{1}{R^2}\iint\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\,d\xi\,d\eta=\oint\eta T(s)\,ds. \qquad (2$$

$$Q_\xi=\iint\bar{\tau}_{\Theta z}\,d\xi\,d\eta=\frac{1}{R^2}\iint\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\,d\xi\,d\eta=\oint\xi T(s)\,ds. \qquad (2$$

$$M=\iint\left(-\eta\bar{\tau}_{\Theta z}+\xi\bar{\tau}_{r\Theta}\right)d\xi\,d\eta=-\frac{1}{R^2}\iint\left(\eta\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\xi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)d\xi\,d\eta=$$

$$=\frac{2}{R^2}\iint\varphi\,d\xi\,d\eta+\oint\omega T(s)\,ds. \qquad (3$$

Через ω обозначена секториальная площадь:

$$\omega = \int_0^s (\xi d\eta - \eta d\xi).$$

При выводе формулы (30) начало отсчета дуги контура сечения принято в точке, где $\varphi=0$. В нашем случае, в соответствии с фиг. 3 и формулой (23),

$$Q_\eta = 0, \quad Q_\xi = -b\int_0^{h-a} \tau_{\theta z 2}\, d\eta = 0.$$

Значение правых частей:

$$\oint \eta\, T(s)\, ds = -\int_0^{h-a} \eta \tau_{\theta z 2}\, d\eta - \int_{h-a}^{0} \eta \tau_{\theta z 2}\, d\eta = 0.$$

$$\int \xi\, T(s)\, ds = -\frac{b}{2}\int_0^{h-a} \tau_{\theta z 2}\, d\eta + \frac{b}{2}\int_{h-a}^{0} \tau_{\theta z 2}\, d\eta = -b\int_0^{h-a} \tau_{\theta z 2}\, d\eta = 0.$$

Условия равновесия на торцах кольца (28) и (29) удовлетворяются. Удовлетворим последнему условию (30).
В соответствии с фиг. 3 и формулой (23)

$$M = b\int_0^{h-a} \eta \tau_{\theta z 2}\, d\eta = в\int_0^{h-a} \left(\eta - \frac{h-a}{2}\right) \tau_{\theta z}\, d\eta.$$

Используя (26), получим:

$$\frac{2}{k}\iint \varphi\, d\xi\, d\eta = -\frac{16\,(h-a)^2}{\pi^3} \sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{k^3}\, \text{th}\, \frac{k\pi}{2}\, \frac{b}{(h-a)} \int_0^{h-a} \tau_{\theta z} \cos k \frac{\eta}{h-a} \pi\, d\eta +$$
$$+ \frac{k_1\,(h-a)^3\, b}{R^2}\, Gn,$$

где

$$k_1 = \frac{1}{3}\left[1 - \frac{192}{\pi^5}\, \frac{(h-a)}{b} \sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{k^5}\, \text{th}\, \frac{k\pi}{2}\, \frac{b}{(h-a)}\right].$$

Значение k_1 в зависимости от $\frac{b}{h-a}$ приводится в курсах теории упругости [6]
Второе слагаемое в формуле (30):

$$\int \omega T(s)\, ds = -\frac{b}{2}\int_0^{h-a} \eta \tau_{\theta z 2}\, d\eta - \int_{h-a}^{0} \left[2b\,(h-a) - \frac{b}{2}\,\eta\right] \tau_{\theta z 2}\, d\eta.$$

Учитывая (23), получим:

$$\oint \omega T(s)\, ds = -b\int_0^{h-a} \left(\eta - \frac{h-a}{2}\right) \tau_{\theta z}\, d\eta.$$

Подставим полученные результаты в соотношение (30) и разреш его относительно n.

$$n=\frac{2R^2}{k_1G(h-a)^3}\int\limits_0^{h-a}\left(\eta-\frac{h-a}{2}\right)\tau_{\Theta z}\,d\eta+$$

$$+\frac{16R^2}{k_1Gb(h-a)\pi^3}\sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{k^3}\,\mathrm{th}\frac{k\pi}{2}\,\frac{b}{(h-a)}\int\limits_0^{h-a}\tau_{\Theta z}\cos k\frac{\eta}{h-a}\pi d\eta. \quad (3$$

Для определения перемещения $w_к$ применим формулу (15), кот рая в соответствии с фиг. 2 принимает следующий вид:

$$w_k=2\pi n. \quad (32$$

Формулы (31) и (32) выражают связь между остаточными напря жениями в трубе и осевым смещением торцов кольца.

Вывод формул для определения остаточных напряжений в трубе

Соотношение (7) является интегральным уравнением для нор мальных остаточных напряжений трубы. Путем двукратного диф ференцирования оно сводится к обыкновенному дифференциаль ному уравнению первого порядка, которое элементарно интегри руется. Для определения возникающей при этом постоянной ис пользуются условия самоуравновешенности остаточных напряже ний:

$$\int\limits_{R_в}^{R_н}\sigma_\Theta\,dr=0,\quad \int\limits_{R_в}^{R_н}r\sigma_z dr\approx R\int\limits_{R_в}^{R_н}\sigma_z dr=0. \quad (33$$

Выполнив указанные операции, получим:

$$\sigma_\Theta-\mu\sigma_z=-\frac{Eh\,\delta_0}{12R^2}-\frac{E\,(h-a)}{12R^3(a)}\left[(h-a)\,R\,(a)\,\frac{d\delta}{da}-(4R_н-3h-a)\,\delta\right]-$$

$$-\frac{E}{6}\int\limits_0^a\frac{\delta(\zeta)}{R^2(\zeta)}\,d\zeta, \quad (34)$$

где δ_0 — перемещение за счет разрезки кольца. Представим изме нение диаметра кольца в виде суммы

$$\delta=\delta_0+\delta(a),$$

где $\delta(a)$ — перемещение предварительно разрезанного кольца, вызванное снятием слоя толщиной a. При определении δ_0, переме щение за счет вырезки кольца из трубы можно не учитывать, т. к. оно весьма мало сравнительно с последующим перемещением.

С учетом малости размеров поперечного сечения кольца сравнительно с диаметром, формула (34) принимает следующий вид:

$$\sigma_\Theta - \mu\sigma_z = 2\frac{E\delta_0}{D^2}\left(\frac{h}{2} - a\right) - \frac{1}{3}\frac{E(h-a)^2}{D^2}\frac{d\delta(a)}{da} +$$

$$+ \frac{4E(h-a)}{3D^2}\delta(a) - \frac{2}{3}\frac{E}{D^2}\int^a \delta(\zeta)\,d\zeta, \qquad (35)$$

где $D=2R$.

Отметим, что полученное выражение совпадает с формулой работы [3], где задача об определении остаточных напряжений в трубе рассматривалась в простейшем предположении, когда напряжения в кольце после вырезки из трубы не зависят от координаты Z, что во многих случаях не имеет места (например случай остаточных напряжений после механической обработки поверхности детали). В нашем исследовании задача о связи между перемещениями кольца и остаточными напряжениями трубы рассматривалась в самой общей постановке.

Второе уравнение для нормальных напряжений составляется по результатам исследования полоски, вырезанной из трубы вдоль ее оси. Задача о связи между перемещениями полоски и остаточными напряжениями трубы подробно рассматривается в работе [3], откуда заимствуется следующая окончательная формула:

$$\sigma_z - \mu\sigma_\Theta = -\frac{8E}{l^2} f_0\left(\frac{h}{2} - a\right) +$$

$$+ \frac{4E}{3l^2}\left[(h-a)^2\frac{df(a)}{da} - 4(h-a)f(a) + 2\int_0^a f(\zeta)\,d\zeta.\right] \qquad (36)$$

В указанной работе при выводе этой формулы принималось, что в полоске имеет место одноосное напряженное состояние, и не учитывались касательные напряжения. Влияние объемного напряженного состояния полоски и касательных напряжений рассматривалось в наших работах [4, 5], где доказано, что формула (36) справедлива в самом общем случае.

Соотношения (35) и (36) позволяют определить остаточные напряжения трубы σ_θ и σ_z. Для определения радиального напряжения используется формула (5), которая после преобразований, с учетом (33) и малой толщины трубы, принимает следующий вид:

$$\sigma_r = -\frac{2}{D}\int_0^a \sigma_\Theta\,d\zeta\,. \qquad (37)$$

Выше рассматривалось определение остаточных напряжений в наружных слоях цилиндра. Для определения напряжений в районе внутренней поверхности цилиндра последний обтачивается до минимально возможной толщины с замером перемещений или деформаций, необходимых для определения дополнительных напряжений в трубе. Далее производится определение остаточных напряжений трубы методом колец и полосок, при этом снимаютс внутренние слои. Можно показать, что для определения остато ных напряжений применимы формулы (35)—(37) после изменени знака правой части на обратный.

Полученные результаты позволяют определить остаточные нор мальные напряжения по всей толщине трубы путем исследовани двух колец и двух полосок. Однако определение напряжений мож но осуществить на одном кольце и одной полоске. В наиболее про стом случае, когда причина возникновения остаточных напряж ний локализована в районе одной поверхности трубы, снятие слое производится до глубины, начиная с которой перемещение пре кращает изменяться. В соответствии с теорией возникновения оста точных напряжений, на оставшейся части толщины образца пер мещение остается неизменимым, что позволяет получить полну деформационную кривую при исследовании на одном образце пу тем экстраполяции.

В общем случае, при исследовании на одном образце, сняти слоев производится в два этапа: сначала снимаются внутренни слои, а затем наружные. На первом этапе остаточные напряжени определяются по формулам (35)$\div$(37), взятым с обратным знаком Для определения напряжений в наружных слоях трубы получен следующая формула:

$$\sigma_\theta - \mu\sigma_z = -\frac{E}{3D^2}\left[2(h-a_1)\delta(a_1) - h\delta_0 - 2\int_0^{a_1}\delta(\zeta_1)\,d\zeta_1\right] - \frac{E}{3D^2}\left[(h-a-a_1)^2\frac{d\delta}{da} - 4(h-a-a_1)\delta + 2\int_0^{a}\delta(\zeta)\,d\zeta\right]. \quad (38)$$

Первое слагаемое в этой формуле вычисляется по результатам снятия внутренних слоев кольца, второе — по результатам сняти наружных слоев.

Через a_1 обозначена толщина внутреннего слоя, снятого на пер вом этапе исследования; a — толщина снятого наружного сло В отличие от формулы (35), перемещение δ отсчитывается от со стояния неразрезанного кольца. Формула (38) получена описан ным выше методом. Аналогичная формула для полоски имее следующий вид:

$$\sigma_z - \mu\sigma_\theta = -\frac{4E}{3l^2}\left[h f_0 - 2(h-a_1) f(a_1) + 2\int_0^{a_1} f(\zeta_1)\,d\zeta_1\right] - \frac{4E}{3l^2}\left[4(h-a-a_1) f - (h-a-a_1)^2\frac{df}{da} - 2\int_0^{a} f(\zeta)\,d\zeta\right]. \quad (39)$$

Здесь перемещения отсчитываются от состояния полоски до вы резки из трубы. Напряжение σ_r для внутренних слоев определяет ся по формуле (37), взятой с обратным знаком. В слоях, принад лежащих средней части трубы, напряжения определяются путем интерполяции. Для определения касательных напряжений в наружных слоях трубы используется формула (32), которая представляет собой уравнение Вольтерра 1-го рода относительно $\tau_{\theta z}$.

$$w_k = \int_0^{h-a} \Gamma(a, \eta)\, \tau_{\theta z}(\eta)\, d\eta. \tag{40}$$

Здесь

$$\Gamma(a, \eta) = \frac{\pi D^2}{k_1 G (h-a)^3}\left(\eta - \frac{h-a}{2}\right) +$$

$$+ \frac{8D^2}{k_1 G b (h-a)\pi^2} \sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{k^3} \operatorname{th}\frac{k\pi}{2}\, \frac{b}{(h-a)} \cos k \frac{\eta}{h-a}\pi.$$

Касательное напряжение нужно определить так, чтобы оно удовлетворяло условию равновесия части трубы:

$$\int_{R_{\text{в}}}^{R_{\text{н}}} r^2 \tau_{\theta z}\, dr \approx R^2 \int_0^h \tau_{\theta z}\, d\eta = 0. \tag{41}$$

Можно доказать, что уравнение (40) при условии (41) имеет единственное решение, для получения которого следует воспользоваться численным методом.

При определении напряжений во внутренних слоях трубы снимаются внутренние слои кольца. Для определения напряжений получено следующее уравнение:

$$w_k = \int_{a_1}^{h} \Gamma_1(a_1, \eta)\, \tau_{\theta z}(\eta)\, d\eta; \tag{42}$$

$$\Gamma_1(a_1, \eta) = \frac{\pi D^2}{k_1 G (h-a_1)^3}\left(\eta - \frac{h+a_1}{2}\right) +$$

$$+ \frac{8D^2}{k_1 G b (h-a_1)\pi^2} \sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{k^3} \operatorname{th}\frac{k\pi}{2}\, \frac{b}{(h-a_1)} \cos k \frac{\eta-a_1}{h-a_1}\pi,$$

где $k_1 = k_1\left(\frac{h-a_1}{b}\right)$.

При определении касательных напряжений, в отличие от нормальных, нужно знать деформационную кривую в пределах всей высоты сечения кольца. В простом случае, о котором говорилось выше, можно обойтись исследованием одного образца, экстраполируя соответствующим образом деформационную кривую. В общем случае необходимо провести исследование двух образцов; в одном из них снимаются наружные слои, в другом внутренние. Для определения напряжений применяются формулы (40)÷(42). При исследовании на одном кольце вначале снимаются внутренние слои, а затем наружные. Для перемещений на втором этапе получена следующая формула:

$$w_k = \int_{a_1}^{h-a} \Gamma_2(a, \eta)\, \tau_{\theta z}(\eta)\, d\eta. \tag{43}$$

$$\Gamma_2(a, \eta) = \frac{\pi D^2}{k_1 G (h-a_1-a)^3}\left(\eta - \frac{h+a_1-a}{2}\right) +$$

$$+ \frac{8D^2}{k_1 G b (h-a_1-a)\pi^2} \sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{k^3} \operatorname{th}\frac{k\pi}{2} \frac{b}{(h-a_1-a)} \cos k \frac{\eta - a_1}{(h-a_1-a)} \pi,$$

где $k_1 = k_1\left(\frac{h-a_1-a}{b}\right)$.

Для определения напряжений применяются формулы (41)÷(43), которые дополняются результатом интерполирования напряжений для области, остающейся после снятия внутренних и наружных слоев. Во всех приведенных формулах $w_к$ отсчитывается от положения до разрезки кольца.

В работе В. Н. Тимофеева [7] предпринималась попытка определения остаточных касательных напряжений в наружном слое трубы при $\eta = h$. Однако при определении перемещения, вызванного снятием наружного слоя малой толщины, не учтены силы, приложенные к наружной цилиндрической поверхности кольца. Учет этих сил можно осуществить с помощью решения (10) и (11). После того, как определены напряжения в трубе, вычисляются напряжения в цилиндре путем вычитания дополнительных напряжений, вызванных получением трубы из цилиндра.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. И. Иванов. Определение остаточных напряжений в цилиндре. Труды КуАИ, вып. 39, 1968.
2. Н. Н. Давиденков. Измерение остаточных напряжений в трубах. Журнал технической физики, вып. 1, т. 1, 1931.
3. И. А. Биргер. Остаточные напряжения. Машгиз, 1963.
4. С. И. Иванов. Определение остаточных напряжений в пластинках методом полосок. Помещена в настоящем сборнике.
5. С. И. Иванов. К определению остаточных напряжений в пластинках методом полосок. Труды КуАИ, вып. 36, 1969.
6. С. П. Тимошенко. Теория упругости, ОНТИ, 1934.
7. В. Н. Тимофеев. К вопросу о напряженном состоянии поверхностного слоя стали при точении. Журнал технической физики, том XXIV, вып. 7, 1954.