

С. И. Иванов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛАСТИНКАХ МЕТОДОМ ПОЛОСОК

Постановка задачи

Довольно часто причина возникновения остаточных напряжений в пластинках (фиг. 1) не зависит от координат x и y . В этом случае остаточные напряжения изменяются только по толщине пластинки и не зависят от x и y :

$$\sigma_x = \sigma_x(z), \quad \sigma_y = \sigma_y(z),$$

$$\sigma_z = \sigma_z(z), \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(z),$$

$$\tau_{yz} = \tau_{yz}(z), \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}(z).$$

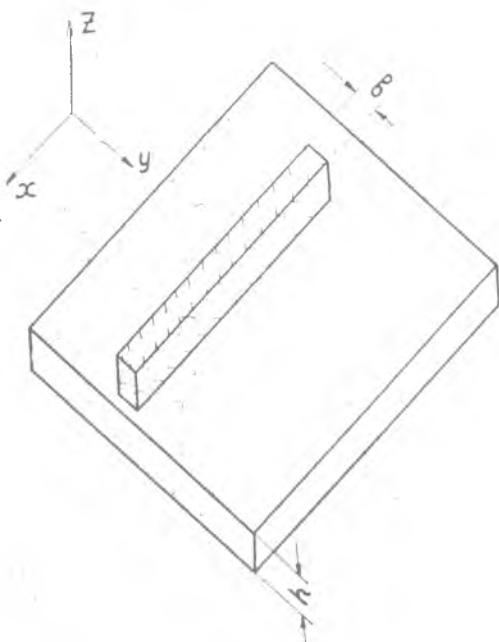
Используя уравнения статики, получим

$$\frac{d\tau_{xz}}{dz} = 0, \quad \frac{d\tau_{yz}}{dz} = 0,$$

$$\frac{d\sigma_z}{dz} = 0.$$

После интегрирования и удовлетворения граничным условиям (отсутствие усилий на поверхности пластинки) будем иметь:

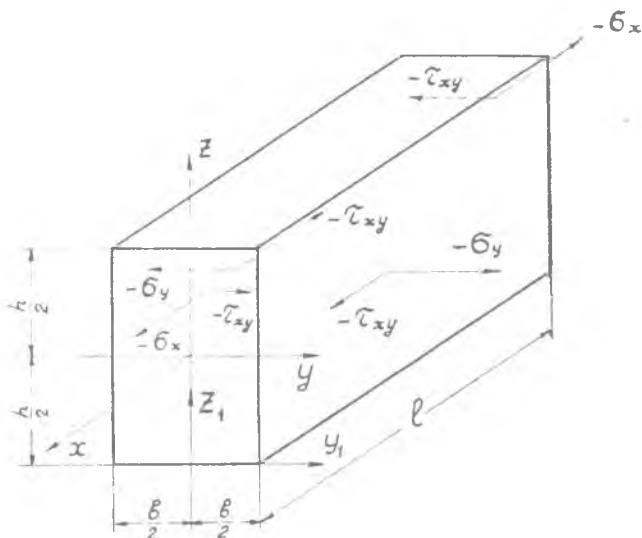
$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0.$$



Фиг. 1.

Следовательно, в любой точке пластинки, исключая зону краевого эффекта, имеет место плоское напряженное состояние, компонентами которого являются напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} . Для определения этих напряжений применяется метод полосок [1].

До настоящего времени метод полосок рассматривался приме



Фиг. 2.

нительно к простейшему случаю, когда заранее известно положение главных осей остаточного напряженного состояния, причем это положение не зависит от координаты z . Второе допущение, которое при этом принимается, заключается в предположении, что полоска после вырезки из пластинки испытывает одноосное напряженное состояние. Однако во многих случаях эти условия не выполняются: например, остаточные напряжения после механической обработки. Для этих напряжений положение главных осей заранее неизвестно и нет оснований считать, что оно остается неизменным по толщине пластинки. В данном случае наблюдается резкое изменение напряжений по координате z , вследствие чего напряженное состояние полоски после вырезки нельзя считать одноосным.

Будем рассматривать метод полосок без указанных упрощающих допущений. На фиг. 2 изображена полоска, вырезанная из пластинки (фиг. 1) вдоль оси x . На гранях полоски показано нагружение, эквивалентное вырезке. Нагрузками при этом являются остаточные усилия пластинки, взятые с обратным знаком. Результатом данного нагружения являются дополнительные напряжения, которые нужно учесть при исследовании полоски.

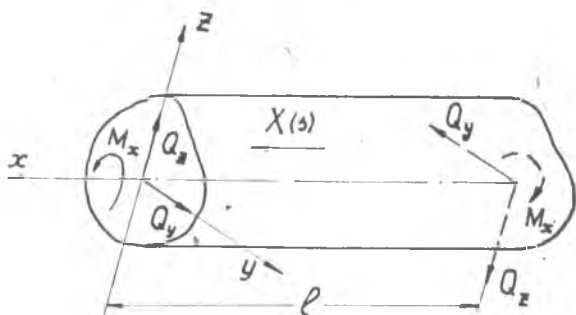
Имеются две системы усилий: нормальная и касательная. Каждая из этих систем самоуравновешена, вследствие чего их действие можно рассматривать раздельно и затем к полученным результатам применить метод суперпозиции. Действие нормальных сил рассматривалось в работе [2], где получены весьма простые результаты. Остается рассмотреть нагружение полоски касательными усилиями. В соответствии с этим будем считать, что в пластинке действуют только касательные остаточные напряжения, которые, как и другие компоненты остаточного напряженного состояния, по толщине пластинки самоуравновешены, т. е.

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz = 0, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \tau_{xy} dz = 0, \quad (1)$$

Рассмотрим нагружение полоски касательными усилиями (фиг. 2). Результатом действия этих усилий будут дополнительные напряжения $\sigma_{x\partial}$, $\sigma_{y\partial}$, $\sigma_{z\partial}$, $\tau_{xy\partial}$, $\tau_{yz\partial}$, $\tau_{xz\partial}$, которые нужно добавить к остаточным напряжениям пластинки с тем, чтобы получить напряжения в полоске. Для определения дополнительных напряжений предстоит решить задачу Митчелла. Одна из последних и наиболее подробных работ, посвященных этой проблеме, принадлежит А. И. Лурье [3]. Однако в необходимой нам постановке задача не рассматривалась. Поэтому ниже приводится решение задачи Митчелла применительно к нашему случаю.

Задача Митчелла применительно к исследованию дополнительных напряжений в полоске

Пусть призматический брус нагружен на боковой поверхности распределенными касательными усилиями $X(s)$, одинаковыми по длине бруса, но изменяющимися вдоль контура поперечного сечения (фиг. 3). Обозначим через Q_y , Q_z и M_x суммы распределен-



Фиг. 3.

ных на торце усилий. Введем в рассмотрение суммарные величины, характеризующие нагрузку на боковой поверхности:

$$q_x = \oint X(s) ds, \quad m_y = \oint zX(s) ds, \quad m_z = - \oint yX(s) ds.$$

Будем рассматривать случай, когда $q_x = 0$.

Решение задачи можно построить в следующем виде:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0; \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(y, z); \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}(y, z).$$

Тогда, как и в задаче о кручении, можно получить следующие выражения для перемещений:

$$u = u(y, z); \quad v = -\Theta xz; \quad w = \Theta xy,$$

где Θ — относительный угол закручивания.

Следовательно, в проекции на плоскость, перпендикулярную оси бруса, поперечное сечение поворачивается как жесткий диск, т. е. рассматриваемое нагружение вызывает деформацию кручения.

Выразим τ_{xy} и τ_{xz} через функцию напряжения φ :

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (2)$$

После подстановки этих выражений в уравнения равновесия и совместности деформаций, с учетом формул для перемещений, получим разрешающее уравнение:

$$\nabla^2 \varphi = -2G\Theta. \quad (3)$$

Остается рассмотреть условие равновесия на боковой поверхности бруса (n_2 и n_3 — направляющие косинусы нормали к боковой поверхности):

$$\tau_{xy} n_2 + \tau_{xz} n_3 = X(s).$$

После подстановки выражений (2) и формул для направляющих косинусов получим:

$$\frac{d\varphi}{ds} = X(s).$$

Отсюда следует выражение для функции напряжения на контуре сечения:

$$\varphi(s) = \int_0^s X(s_1) ds_1. \quad (4)$$

Из условия $q_x = 0$ следует, что $\varphi(s)$ является однозначной функцией.

Найдем, далее, усилия, которые должны быть приложены на торцах бруса:

$$Q_y = \iint \tau_{xy} dydz = \iint \frac{\partial \varphi}{\partial z} dydz = - \oint \varphi dy.$$

После интегрирования по частям с учетом однозначности φ :

$$Q_y = \oint y d\varphi.$$

Используя (4), находим:

$$Q_y = -m_z. \quad (5)$$

Аналогичным путем можно получить выражение для Q_z .

$$Q_z = m_y. \quad (6)$$

Наконец, для M_x будем иметь:

$$M_x = \iint (y\tau_{xz} - z\tau_{xy}) dydz = - \iint \left(y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dydz.$$

После преобразований с применением формулы Грина:

$$M_x = 2 \iint \varphi dydz - \oint \varphi d\omega,$$

где ω — секториальная площадь:

$$\omega = \int_0^s (ydz - zdy).$$

Интегрируя второе слагаемое по частям и выбрав начало отсчета s в точке, где $\varphi=0$, приходим к окончательному результату:

$$M_x = 2 \iint \varphi dydz + \oint \omega X(s) ds. \quad (7)$$

Формулы (2) — (7) служат для решения поставленной задачи Митчелла.

В частном случае, который нас интересует, брус имеет прямоугольное поперечное сечение и нагружен по двум параллельным граням одинаковыми по величине, но противоположными по знаку усилиями $X(s)$, самоуравновешенными в пределах каждой грани. Найдем решение для этого случая. На основании (1)

$$q_x = m_y = m_z = 0.$$

Следовательно, $Q_y = Q_z = 0$. (8)

Функцию напряжения φ представим в виде суммы:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2. \quad (9)$$

Функции φ_1 и φ_2 являются решениями следующих уравнений:

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0, \quad \varphi_1(s) = \int_0^s X(s_1) ds_1; \quad (10)$$

$$\nabla^2 \varphi_2 = -2G\theta, \quad \varphi_2(s) = 0. \quad (11)$$

Принимаем начало отсчета s в любой точке на одной из горизонтальных сторон сечения (фиг. 2). В этом случае на основании (1):

$$\varphi_1(s) \Big|_{y=\frac{b}{2}} = \varphi_1(s) \Big|_{y=-\frac{b}{2}}, \quad (12)$$

$$\varphi_1(s) \Big|_{z=\pm \frac{h}{2}} = 0. \quad (13)$$

Представим $\varphi_1(s)$ при $y = \pm \frac{b}{2}$ рядом Фурье с периодом h :

$$\varphi_1(s) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sin n \frac{2\pi}{h} z + b_n \cos n \frac{2\pi}{h} z \right). \quad (14)$$

Учитывая (1), получаем $a_0 = 0$.

На основании (13)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n = 0. \quad (15)$$

Рассмотрим выражение (14) в новой системе осей y_1, z_1 (фиг. 2). Разлагая $\varphi_1(s)$ в ряд по $\sin k \frac{\pi}{h} z_1$ в промежутке $(0, h)$, получим

$$\varphi_1(s) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin k \frac{\pi}{h} z_1. \quad (16)$$

Здесь:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } k - \text{нечетном} \quad C_k &= \frac{4k}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{b_n}{k^2 - 4n^2}, \\ \text{при } k - \text{четном} \quad C_k &= (-1)^{\frac{k}{2}} a_{\frac{k}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Решение для φ_1 , применительно к нашим контурным условиям имеет следующий вид [4]:

$$\varphi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{\operatorname{ch} k \frac{\pi}{h} y_1}{\operatorname{ch} k \frac{b}{h} \frac{\pi}{2}} \sin k \frac{\pi}{h} z_1. \quad (18)$$

Удовлетворяя условиям на контуре, получим $A_k = C_k$. В исходной системе осей y, z :

$$\varphi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{\operatorname{ch} k \frac{\pi}{h} y}{\operatorname{ch} k \frac{b}{h} \frac{\pi}{2}} \sin k \frac{\pi}{h} \left(z + \frac{h}{2} \right). \quad (19)$$

Для φ_2 воспользуемся известным в теории упругости решением задачи о кручении прямоугольной призмы [5]:

$$\varphi_2 = \frac{8G\theta b^2}{\pi^3} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^3} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} k \frac{\pi}{b} z}{\operatorname{ch} k \frac{h}{b} \frac{\pi}{2}} \right) \cos k\pi \frac{y}{b}.$$

В соответствии с формулой (9)

$$\begin{aligned} \varphi = & \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{\operatorname{ch} k \frac{\pi}{h} y}{\operatorname{ch} k \frac{h}{b} \frac{\pi}{2}} \sin k \frac{\pi}{h} \left(z + \frac{h}{2} \right) + \\ & + \frac{8G\theta b^2}{\pi^3} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^3} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} k \frac{\pi}{b} z}{\operatorname{ch} k \frac{h}{b} \frac{\pi}{2}} \right) \cos k\pi \frac{y}{b}. \quad (20) \end{aligned}$$

Найдем теперь выражение для M_x по формуле (7). Используя (1), можно показать, что

$$\oint \omega X(s) ds = 0.$$

Тогда, вычисляя первое слагаемое, будем иметь:

$$M_x = k_1 G \theta b^3 h + 32 \frac{h^2}{\pi^3} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n \frac{\operatorname{th} k \frac{b}{2h} \pi}{k(k^2 - 4n^2)}, \quad (21)$$

где [5] $k_1 = f\left(\frac{h}{b}\right)$.

Полагая $M_x = 0$, получим формулу для относительного угла закручивания в случае, когда усилия на торце самоуравновешены:

$$\theta = -\frac{32}{\pi^3} \frac{h}{k_1 G b^3} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n \frac{\operatorname{th} k \frac{b}{2h} \pi}{k(k^2 - 4n^2)}. \quad (22)$$

Отметим, что в выражение для θ не вошли коэффициенты Фурье a_n . Следовательно, при четной по z нагрузке ($b_n = 0$) брус не закручивается, происходит лишь депланация поперечных сечений.

Учет остаточных касательных напряжений при определении деформаций и перемещений полоски в процессе снятия слоев

В соответствии с условием рассматриваем пластинку, в которой действуют только касательные остаточные напряжения τ_{xy} . Результатом вырезки полоски являются дополнительные напряжения. На основании предыдущего исследования, в большей части полоски, исключая район торцов,

$$\sigma_{x\partial} = \sigma_{y\partial} = \sigma_{z\partial} = \tau_{yz\partial} = 0.$$

Напряжения $\tau_{xy\partial}$ и $\tau_{yz\partial}$ выражаются формулами (2), (20) и (17). Так как на торце полоски приложена самоуравновешенная система сил, выражение для Θ можно получить по формуле (22). Учитывая силы на фиг. 2, нужно принять:

$$X(s) \Big|_{y=\frac{b}{2}} = -\tau_{xy}, \quad X(s) \Big|_{y=-\frac{b}{2}} = \tau_{xy}.$$

В результате вырезки полоска закручивается на угол $\Psi = \Theta l$.

Если остаточные касательные напряжения в пластинке симметричны относительно срединной плоскости, то, на основании изложенного выше, полоска после вырезки не закручивается.

В качестве примера найдем значение Θ для полоски, вырезанной из пластинки с остаточными напряжениями

$$\tau_{xy} = \tau_0 \left(\sin \frac{2\pi}{h} z + 2 \sin \frac{4\pi}{h} z \right)$$

при следующих данных:

$$\tau_0 = 10 \text{ кг/мм}^2, \quad G = 0,8 \cdot 10^4 \text{ кг/мм}^2, \quad \frac{h}{b} = \frac{\pi}{2}, \quad b = 5 \text{ мм}.$$

В результате вычислений получим:

$$\Theta = -0,52 \cdot 10^{-4} \text{ мм}^{-1}.$$

Данный пример позволяет составить представление о величине перемещений полоски, связанных с τ_{xy} .

Напряжения в полоске после вырезки:

$$\sigma_{xn} = \sigma_{yn} = \sigma_{zn} = \tau_{yzn} = 0; \quad \tau_{xyn} = \tau_{xy} + \tau_{xy\partial}; \quad \tau_{xzn} = \tau_{xz\partial}.$$

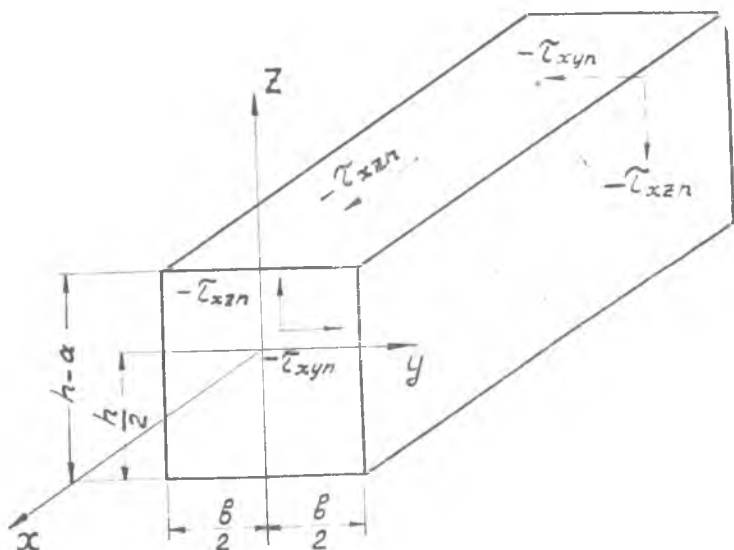
Для определения напряжений в полоске производится последовательное снятие слоев с замером деформаций ε_x или прогиба. На фиг. 4 изображено нагружение полоски, эквивалентное снятию слоя толщиной a . На основании выражения (20), τ_{xzn} является нечетной функцией y , в связи с чем $q_x = 0$. Напряжение τ_{xzn} одинаково во всех сечениях полоски. Следовательно, для показанного на фиг. 4 нагружения применимо решение (2)—(4). Отсюда следует, что результатом снятия слоев полоски является закручивание.

Для нагружения, изображенного на фиг. 4, можно получить решение типа (20)—(22). Однако для исследования остаточных напряжений в пластинке достаточно знать — будет ли угол закручива-

ния при снятии слоев отличаться от нуля. Для решения этого вопроса имеется более простой путь, основанный на том, что суммарный эффект вырезки и последующего снятия слоев можно получить, рассматривая вырезку из пластинки полоски без слоя a .

В таком случае $\Theta = \Theta_a - \Theta_0$,

где Θ — относительный угол закручивания полоски в результате снятия слоя a ; Θ_a — то же, но после вырезки из пластинки полоски без слоя a ; Θ_0 — относительный угол закручивания полной полоски в результате вырезки из пластинки.



Фиг. 4.

При нагружении, которому соответствует Θ_a , $q_x = 0$. Следовательно здесь применено решение (2)–(4).

В качестве примера рассмотрим случай, когда остаточные касательные напряжения в пластинке изменяются по закону ломаной прямой (фиг. 5). На фиг. 5 изображено также нагружение части полоски при $a = \frac{h}{2}$, эквивалентное вырезке из пластинки. Данное нагружение вызывает закручивание, характеризующееся углом Θ_a .

Разрешающим уравнениям (3) и (4) удовлетворяет функция

$$\varphi = \tau_0 z \left(1 + \frac{2z}{h} \right).$$

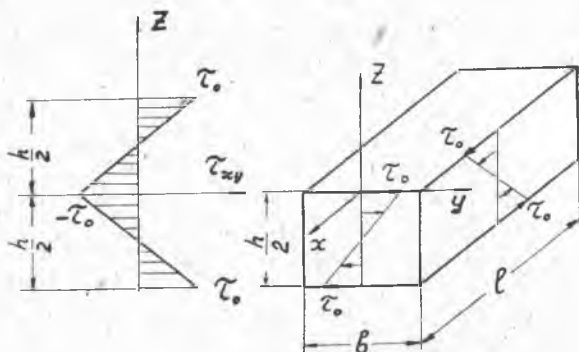
Подставив в уравнение (3), получим

$$\Theta_a = -\frac{2\tau_0}{Gh}.$$

В силу симметрии τ_{xy} относительно срединной плоскости пластинки $\theta_0 = 0$.

Таким образом, в результате снятия слоя указанной толщины полоска закрутится на угол

$$\psi = -\frac{2\tau_0}{Gh} l.$$



Фиг. 5.

Чтобы составить представление о величине этого угла, вычислим Ψ при следующих данных:

$\tau_0 = 10 \text{ кг/мм}^2$, $G = 0,8 \cdot 10^4 \text{ кг/мм}^2$, $h = 8 \text{ мм}$, $l = 80 \text{ мм}$. В результате получим:

$$\Psi = -0,025 \text{ рад.}$$

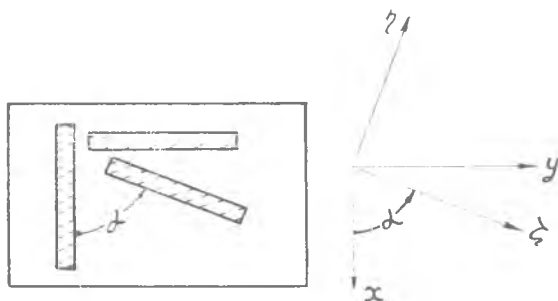
На основании разобранных примеров можно заключить, что полоска при снятии слоев закручивается. При определении остаточных напряжений, в процессе снятия слоев регистрируется либо ϵ_x на нижней грани полоски, либо прогиб полоски. Однако при кручении эти величины равны нулю. Следовательно, остаточные касательные напряжения не войдут в соотношение, связывающее остаточные напряжения пластинки и измеряемую при снятии слоев полоски величину (см. формулу (23)).

Определение полностью неизвестного поля остаточных напряжений в пластинке

В данном случае необходимо определить остаточные напряжения $\sigma_x(z)$, $\sigma_y(z)$ и $\tau_{xy}(z)$. Для этого можно воспользоваться либо методом розетки полосок, либо методом двух полосок с определением деформации сдвига.

А. Метод розетки полосок. В этом случае из пластинки вырезаются три полоски по направлениям x , y и ζ (фиг. 6). Затем производится последовательное снятие слоев с замером деформаций или перемещений полосок. Для исключения влияния закручивания

необходимо измерять прогиб полоски в плоскости, проходящей через середину ее ширины. Остаточные касательные напряжения не влияют на деформацию ε_x и прогиб полоски, что позволяет применять для определения остаточных напряжений формулы, полученные для простейшего случая, когда $\tau_{xy}=0$ [1]. Например,



Фиг. 6.

по результатам исследования полоски, вырезанной вдоль оси x , определяется величина

$$\sigma_x - \mu\sigma_y = -\frac{1}{2} E (h-a) \frac{d\varepsilon_x}{da} + 2E\varepsilon_x - 3E(h-a) \int_0^a \frac{\varepsilon_x}{(h-\xi)^2} d\xi. \quad (23)$$

Исследование трех полосок позволяет получить значения

$$\sigma_x, \sigma_y \text{ и } \sigma_z = \mu\sigma_n.$$

Для определения τ_{xy} воспользуемся формулами (фиг. 6)

$$\sigma_z = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha,$$

$$\sigma_n = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha.$$

Из этих соотношений следует формула для подсчета остаточных касательных напряжений в пластинке:

$$\tau_{xy} = \frac{1}{(1+\mu) \sin 2\alpha} [(\sigma_z - \mu\sigma_n) - (\sigma_x - \mu\sigma_y) \cdot \cos^2 \alpha - (\sigma_y - \mu\sigma_x) \sin^2 \alpha]. \quad (24)$$

Б. Метод двух полосок. В соответствии с этим методом из пластинки следует вырезать две достаточно широкие полоски по направлениям x и y . Необходимая ширина полоски:

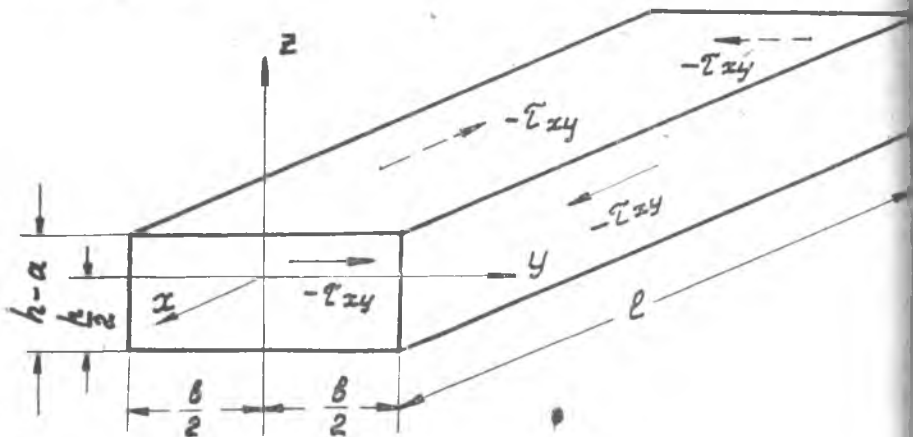
$$b \geq 2h + \frac{\Delta}{\sqrt{2}}. \quad (25)$$

Здесь Δ — база тензодатчиков, которые наклеиваются на полосу. Размер l должен быть таким, чтобы полоска являлась бруском.

На фиг. 7 изображено нагружение полоски, эквивалентное вырезке из пластинки без слоя a .

Здесь не показаны нормальные усилия, которые в дальнейшем не потребуются. Результатом эквивалентного нагружения являются дополнительные напряжения $\tau_{xy\partial}$. Нормальные дополнительные напряжения $\sigma_{x\partial}$ и $\sigma_{y\partial}$ отсутствуют.

Рассмотрим $\tau_{xy\partial}$ на нижней поверхности полоски в зоне, где $|y| \leq \frac{b}{2} - h$.



Фиг. 7.

Нагрузку, действующую на полоску, представим в виде суммы трех слагаемых:

$$\tau_{xy} = \tau_{xy1} + \tau_{xy2} + \tau_{xy3},$$

где

$$\tau_{xy1} = \frac{1}{h-a} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-a} \tau_{xy} dz, \quad \tau_{xy2} = \frac{12 \left(z + \frac{a}{2} \right)}{(h-a)^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-a} \left(z + \frac{a}{2} \right) \tau_{xy} dz.$$

Первое слагаемое вызывает однородный чистый сдвиг:

$$\tau_{xy\partial 1} = -\tau_{xy1} = -\frac{1}{(h-a)} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-a} \tau_{xy} dz.$$

Решение для нагружения напряжениями τ_{xy2} рассматривалось выше. В этом случае поверхностные нагрузки передаются через полосу не изменяясь:

$$\tau_{xy\partial 2} = \frac{6}{(h-a)^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-a} \left(z + \frac{a}{2} \right) \tau_{xy} dz.$$

Нагрузка, определяемая τ_{xy3} , является самоуравновешенной. В соответствии с принципом Сен-Венана, дополнительные напряжения в рассматриваемой зоне от этой нагрузки практически отсутствуют, т. е.

$$\tau_{xy3} \approx 0.$$

Суммируя результаты трех нагружений, получим:

$$\tau_{xy\delta} = -\frac{1}{h-a} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-a} \tau_{xy} dz + \frac{6}{(h-a)^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-a} \left(z + \frac{a}{2}\right) \tau_{xy} dz. \quad (26)$$

Здесь $\tau_{xy\delta}$ — известная функция от a , которая определяется при снятии слоев полоски. Соотношение (26) является интегральным уравнением для определения остаточных касательных напряжений в пластинке $\tau_{xy}(z)$. Если учесть (1), то при $a=0$ $\tau_{xy\delta}=0$. Это обстоятельство позволяет начать регистрацию $\tau_{xy\delta}$ после вырезки полоски из пластинки, что значительно упрощает измерения.

Дифференцируя дважды соотношение (26), получим для τ_{xy} линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию (1), таково:

$$\tau_{xy} = -\frac{(h-a)}{2} \frac{d\tau_{xy\delta}}{da} + 2\tau_{xy\delta} - 3(h-a) \int_0^a \frac{\tau_{xy\delta}(\xi)}{(h-\xi)^2} d\xi.$$

Воспользуемся выражением для $\tau_{xy\delta}$ через линейную относительную деформацию по направлению, составляющему с осью x угол 45° :

$$\tau_{xy\delta} = \frac{E}{1+\mu} \epsilon. \quad (27)$$

После подстановки получим:

$$\tau_{xy} = -\frac{E}{2(1+\mu)} (h-a) \frac{d\epsilon}{da} + \frac{2E}{1+\mu} \epsilon - \frac{3E}{1+\mu} (h-a) \int_0^a \frac{\epsilon(\xi)}{(h-\xi)^2} d\xi. \quad (28)$$

Для замера ϵ в процессе снятия слоев в средней части нижней поверхности полоски, под углом 45° к ее оси наклеиваются два взаимно перпендикулярных тензодатчика, включаемых в измерительное устройство по схеме измерения деформации сдвига, при этом исключаются дополнительные деформации, соответствующие напряжениям σ_x и σ_y , что необходимо по смыслу выражения (27).

Замер деформации ϵ достаточно осуществить на одной из вырезанных полосок. Для проверки можно произвести аналогичные измерения и на второй полоске. Кроме того, при исследовании каждой полоски определяется относительная деформация на нижней поверхности вдоль оси полоски.

Результаты тензометрирования полосок при снятии слоев — ϵ_x , и ϵ — позволяют определить остаточные напряжения в пластинках $\sigma_x(z)$, $\sigma_y(z)$ и $\tau_{xy}(z)$; для этого следует воспользоваться формулами (23) и (28).

ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Биргер. Остаточные напряжения, Машгиз, 1963.
2. С. И. Иванов. К определению остаточных напряжений в пластинках методом полосок. Сборник трудов КуАИ, вып. XXXVI, Куйбышев, 1969.
3. А. И. Лурье. Задача Митчелла. Сборник «Строительная механика» Стройиздат, 1966 г.
4. Л. В. Канторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. Физматгиз, 1962.
5. С. П. Тимошенко. Теория упругости, ОНТИ-ГТТИ, 1934.