

С. И. ИВАНОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ЦИЛИНДРЕ

В целом ряде практически интересных случаев заранее известно, что остаточные напряжения в цилиндре зависят только от радиуса (например, остаточные напряжения после течения или в результате заневоливания кручением). Выявим напряжения, которые могут в данном случае отличаться от нуля. Воспользуемся для этого уравнениями равновесия в цилиндрических координатах.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Учитывая, что напряжения зависят только от r , получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{d\tau_{rz}}{dr} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0 \\ \frac{d\tau_{r\theta}}{dr} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Второе и третье уравнения элементарно интегрируются и приводят к следующему результату:

$$\tau_{rz} = \frac{A}{r}; \quad \tau_{r\theta} = \frac{B}{r}.$$

Учитывая, что наружная поверхность цилиндра свободна от нагрузок, получим $A=0$, $B=0$, а затем $\tau_{rz} = \tau_{r\theta} = 0$. Следовательно, отличны от нуля и подлежат определению следующие остаточные напряжения:

$$\sigma_r(r), \sigma_\theta(r), \sigma_z(r), \tau_{\theta z}(r).$$

Частный случай, когда $\tau_{\theta z}=0$, рассматривался Г. Заксом, а также Л. А. Гликманом и А. Н. Бабаевым [1]. Случай, когда $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = 0$, разбирался, применительно к сплошному цилиндру, Н. Н. Давиденковым [3]. Следуя предыдущим авторам, для определения остаточных напряжений будем применять метод расточки и обточки цилиндра. Освобождающиеся при этом усилия можно определять либо посредством розетки из трех проволочных тензометров либо с помощью двух тензометров и устройства для замера угла закручивания цилиндра.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ВО ВНУТРЕННИХ СЛОЯХ ЦИЛИНДРА

С этой целью проводится последовательная расточка цилиндра с измерением деформаций на наружной поверхности с помощью розетки тензометров (фиг. 1). Эквивалентное расточке нагружение цилиндра показано на фиг. 2. Цилиндр нагружен внутренним давлением величиной σ_r , растягивающими силами $N(r)$ и скручивающими парами сил $M(r)$:

$$N(r) = 2\pi \int_{R_1}^r \rho \sigma_z d\rho; \quad M(r) = 2\pi \int_{R_1}^r \rho^2 \tau_{\theta z} d\rho.$$

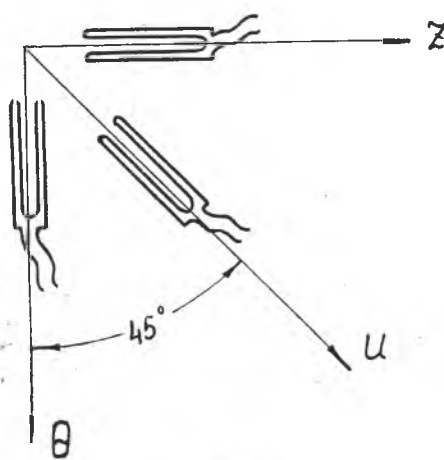
Указанные на фиг. 2 усилия вызывают на наружной поверхности цилиндра деформации $\varepsilon_{z2}(r)$, $\varepsilon_{\theta 2}(r)$ и $\varepsilon_{\theta z 2}(r)$, которые регистрируются соответствующими тензометрами. Пары сил $M(r)$ не вызывают линейных деформаций по направлениям z и θ . В связи с этим, для вычисления σ_r , σ_z и σ_θ можно воспользоваться формулами, приведенными в работе [1], для случая, когда $\tau_{\theta z} = 0$,

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \frac{R_2^2 - r^2}{2r^2} [\varepsilon_{\theta 2}(r) + \mu \cdot \varepsilon_{z2}(r)], \quad (3)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left[\frac{R_2^2 - r^2}{2r} \left(\frac{d\varepsilon_{z2}(r)}{dr} + \mu \cdot \frac{d\varepsilon_{\theta 2}(r)}{dr} \right) - \varepsilon_{z2}(r) - \mu \cdot \varepsilon_{\theta 2}(r) \right], \quad (4)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{R_2^2 - r^2}{2r} \left(\frac{d\varepsilon_{\theta 2}(r)}{dr} + \mu \cdot \frac{d\varepsilon_{z2}(r)}{dr} \right) - \frac{R_2^2 + r^2}{2r^2} (\varepsilon_{\theta 2}(r) + \mu \cdot \varepsilon_{z2}(r)) \right]. \quad (5)$$

Для определения $\tau_{\theta z}$ учтем, что угловая деформация на наружной поверхности цилиндра от нагружения, изображенного на фиг. 2, может быть вычислена по следующей формуле [2]:



Фиг. 1.

$$\gamma_{\theta z 2}(r) = 2\varepsilon_{u2}(r) - \varepsilon_{z2}(r) - \varepsilon_{\theta 2}(r) \quad (6)$$

Эту деформацию можно выразить через освободившиеся усилия:

$$\gamma_{\theta z 2}(r) = \frac{\tau_{\theta z 2}(R_2)}{G} \quad (7)$$

Дополнительное напряжение $\tau_{\theta z 2}(R_2)$ является результатом кручения и может быть вычислено по известной формуле сопротивления материалов:

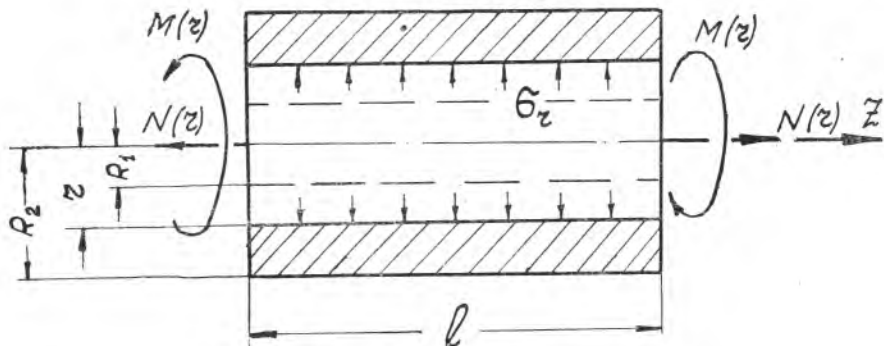
$$\begin{aligned} \tau_{\theta z 2}(R_2) &= \frac{M(r)}{I_p} \cdot R_2 = \\ &= \frac{4R_2}{R_2^4 - r^4} \int_{R_1}^r \rho^2 \cdot \tau_{\theta z} d\rho. \end{aligned} \quad (8)$$

После подстановки значения $\tau_{\theta z 2}(R_2)$ в соотношение (7) и дифференцирования по r , получим:

$$\tau_{\theta z} = G \left[\frac{R_2^4 - r^4}{4R_2 r^2} \cdot \frac{d\gamma_{\theta z 2}(r)}{dr} - \frac{r}{R_2} \gamma_{\theta z 2}(r) \right].$$

Учитывая (6), приходим к окончательной формуле:

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z} &= G \left[\frac{R_2^4 - r^4}{4R_2 r^2} \left(2 \frac{d\varepsilon_{u2}(r)}{dr} - \frac{d\varepsilon_{z2}(r)}{dr} - \frac{d\varepsilon_{\theta 2}(r)}{dr} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{r}{R_2} \left(2\varepsilon_{u2}(r) - \varepsilon_{z2}(r) - \varepsilon_{\theta 2}(r) \right) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$



Фиг. 2.

При определении направления $\tau_{\theta z}$ следует учесть, что система осей, в которых решается задача, является правой. Формулы (3), (4), (5) и (9) позволяют определить остаточные напряжения во внутренних слоях полого цилиндра. Эти формулы применимы и для сплошного цилиндра. Однако, при малых радиусах расточки, результаты замера деформаций не являются надежными, т. к. последние невелики из-за малости освобождающихся усилий. Способ преодоления этого затруднения для напряжений σ_r , σ_z и σ_{θ} изложен в работе [1]. При определении касательных напряжений следует учесть, что на оси цилиндра $\tau_{\theta z} = \tau_{rz} = 0$. Это обстоятельство позволяет произвести интерполяцию для определения касательных напряжений при малых r .

Получим формулу для вычисления $\tau_{\theta z}$ в случае, когда при расточке определяются $\varepsilon_{z2}(r)$, $\varepsilon_{\theta 2}(r)$ и угол закручивания цилиндра $\varphi(r)$. Напряжения σ_r , σ_{θ} и σ_z определяются по формулам (3), (4) и (5). Для определения $\tau_{\theta z}$ через φ рассмотрим эквивалентное нагружение цилиндра парами сил $M(r)$ (фиг. 2)

$$\tau(r) = \frac{M(r)l}{GI_{\rho}} = \frac{4l}{G(R_2^4 - r^4)} \int_{R_1}^r \rho^2 \tau_{\theta z} d\rho.$$

После дифференцирования по r , получим окончательную формулу для подсчета $\tau_{\theta z}$:

$$\tau_{\theta z} = \frac{G}{l} \left[\frac{R_2^4 - r^4}{4r^3} \cdot \frac{d\varphi(r)}{dr} - r \cdot \tau(r) \right]. \quad (10)$$

При вычислениях следует иметь в виду, что положительное значение угла закручивания соответствует нагружению, изображенному на фиг. 2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ВО ВНЕШНИХ СЛОЯХ ЦИЛИНДРА

Для определения напряжений во внешних слоях проводится последовательная обточка цилиндра с замером деформаций $\varepsilon_{z1}(r)$; $\varepsilon_{\theta 1}(r)$ и $\varepsilon_{u1}(r)$ на внутренней поверхности цилиндра. Тензомер, измеряющий $\varepsilon_{u1}(r)$ следует наклеивать так, чтобы при положительных $M(r)$ (фиг. 2) он испытывал растяжение. При определении σ_r , σ_z и σ_{θ} также можно воспользоваться формулами для частного случая ($\tau_{\theta z} = 0$), которые мы заимствуем из работы [1]:

$$\sigma_r = -\frac{E}{1-\mu^2} \cdot \frac{r^2 - R_1^2}{2r^2} (\varepsilon_{\theta 1}(r) + \mu \cdot \varepsilon_{z1}(r)) \quad (11)$$

$$\sigma_z = -\frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{r^2 - R_1^2}{2r} \left(\frac{d\varepsilon_{z1}(r)}{dr} + \mu \cdot \frac{d\varepsilon_{\theta 1}(r)}{dr} \right) + \varepsilon_{z1}(r) + \mu \varepsilon_{\theta 1}(r) \right] \quad (12)$$

$$\sigma_{\theta} = -\frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{r^2 - R_1^2}{2r} \left(\frac{d\varepsilon_{\theta 1}(r)}{dr} + \mu \cdot \frac{d\varepsilon_{z 1}(r)}{dr} \right) + \frac{r^2 + R_1^2}{2r^2} (\varepsilon_{\theta 1}(r) + \mu \cdot \varepsilon_{z 1}(r)) \right] \quad (13)$$

Применяя рассуждения и выкладки, аналогичные случаю расточки цилиндра, получим выражение для $\tau_{\theta z}$:

$$\tau_{\theta z} = -G \left[\frac{r^4 - R_1^4}{4R_1 r^2} \left(2 \cdot \frac{d\varepsilon_{\theta 1}(r)}{dr} - \frac{d\varepsilon_{z 1}(r)}{dr} - \frac{d\varepsilon_{\theta 1}(r)}{dr} \right) + \frac{r}{R_1} (2\varepsilon_{\theta 1}(r) - \varepsilon_{z 1}(r) - \varepsilon_{\theta 1}(r)) \right] \quad (14)$$

Формулы (11), (12), (13) и (14) служат для определения остаточных напряжений во внешних слоях полого цилиндра. Если при обточке определяются $\varepsilon_{z 1}(r)$, $\varepsilon_{\theta 1}(r)$ и угол закручивания цилиндра $\varphi(r)$, то для определения $\tau_{\theta z}$ следует применять следующую формулу

$$\tau_{\theta z} = -\frac{G}{l} \left[\frac{r^4 - R_1^4}{4r^2} \cdot \frac{d\varphi(r)}{dr} + r \cdot \tau(r) \right] \quad (15)$$

Эта формула получена на основании рассуждений, аналогичных случаю расточки цилиндра. Для определения напряжений во внешних слоях сплошного цилиндра необходимо произвести предварительную расточку с тем, чтобы иметь возможность замерять деформации на внутренней поверхности цилиндра. Учет предварительной расточки рассматривается ниже.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ВО ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СЛОЯХ ЦИЛИНДРА НА ОДНОМ ОБРАЗЦЕ

В первую очередь производится расточка цилиндра до $r=R_3$. При этом по формулам (3), (4), (5) и (9) или (10) определяются напряжения во внутренних слоях цилиндра. Затем, для определения напряжений во внешних слоях, производится обточка цилиндра с замером деформаций на внутренней поверхности предварительно расточенного цилиндра. Для определения напряжений σ_r , σ_z и σ_{θ} во внешних слоях применимы формулы, приведенные в работе [1]:

$$\sigma_r = -\frac{E}{1-\mu^2} \cdot \frac{r^2 - R_3^2}{2r^2} [\varepsilon_{\theta 3}(r) + \mu \varepsilon_{z 3}(r)] + \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \frac{R_2^2 - r^2}{2r^2} [\varepsilon_{\theta 2}(R_3) + \mu \cdot \varepsilon_{z 2}(R_3)], \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta} = & -\frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{r^2 - R_3^2}{2r} \left(\frac{d\varepsilon_{\theta 3}(r)}{dr} + \mu \cdot \frac{d\varepsilon_{z 3}(r)}{dr} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{r^2 + R_3^2}{2r^2} (\varepsilon_{\theta 3}(r) + \mu \cdot \varepsilon_{z 3}(r)) \right] - \\ & -\frac{E}{1-\mu^2} \cdot \frac{R_2^2 + r^2}{2r^2} (\varepsilon_{\theta 2}(R_3) + \mu \cdot \varepsilon_{z 2}(R_3)), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z = & -\frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{r^2 - R_3^2}{2r} \left(\frac{d\varepsilon_{z 3}(r)}{dr} + \mu \cdot \frac{d\varepsilon_{\theta 3}(r)}{dr} \right) + \varepsilon_{z 3}(r) + \mu \cdot \varepsilon_{\theta 3}(r) \right] - \\ & -\frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{z 2}(R_3) + \mu \cdot \varepsilon_{\theta 2}(R_3)). \end{aligned} \quad (18)$$

Для определения $\tau_{\theta z}$ из напряжения, вычисленного по формуле (14), следует вычесть дополнительное напряжение, которое является результатом предварительной расточки цилиндра до $r=R_3$. Дополнительная угловая деформация на наружной поверхности после расточки определяется с помощью розетки тензометров:

$$\gamma_{\theta z 2}(R_3) = 2\varepsilon_{\theta z 2}(R_3) - \varepsilon_{z 2}(R_3) - \varepsilon_{\theta 2}(R_3)$$

Соответствующее касательное напряжение:

$$\tau_{\theta z 2} = G \cdot \gamma_{\theta z 2}(R_3) = G (2\varepsilon_{\theta z 2}(R_3) - \varepsilon_{z 2}(R_3) - \varepsilon_{\theta 2}(R_3)).$$

Для определения дополнительного напряжения в любом слое цилиндра используем линейный закон изменения напряжений по радиусу

$$\tau_{\theta z 0} = G \frac{r}{R_2} (2\varepsilon_{\theta z 2}(R_3) - \varepsilon_{z 2}(R_3) - \varepsilon_{\theta 2}(R_3)).$$

Вычитая это напряжение из результатов вычисления по соотношению (14), получим формулу для остаточных касательных напряжений в наружных слоях цилиндра

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z} = & -G \left[\frac{r^4 - R_1^4}{4R_1 r^2} \left(2 \frac{d\varepsilon_{\theta 1}(r)}{dr} - \frac{d\varepsilon_{z 1}(r)}{dr} - \frac{d\varepsilon_{\theta 1}(r)}{dr} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{r}{R_1} (2\varepsilon_{\theta 1}(r) - \varepsilon_{z 1}(r) - \varepsilon_{\theta 1}(r)) + \right. \\ & \left. + \frac{r}{R_2} (2\varepsilon_{\theta z 2}(R_3) - \varepsilon_{z 2}(R_3) - \varepsilon_{\theta 2}(R_3)) \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Рассмотрим также случай, когда при обточке определяются $\varepsilon_{z 1}(r)$, $\varepsilon_{\theta 1}(r)$ и $\varphi(r)$. В конце расточки угол закручивания цилиндра — $\varphi(R_3)$. В дальнейшем, при обточке, нужно учесть дополнительные напряжения, вызванные расточкой до $r=R_3$. В соответствии с гипотезой плоских сечений, дополнительные напряжения в расточенном цилиндре вычисляются по следующей формуле:

$$\tau_{\theta z 0} = G \cdot \frac{\varphi(R_3)}{l} \cdot r.$$

Вычитая эти напряжения из вычисленных по формуле (15), получим остаточные касательные напряжения во внешних слоях цилиндра:

$$\tau_{\theta z} = -\frac{G}{l} \left[\frac{r^4 - R_1^4}{4r^2} \cdot \frac{d\varphi(r)}{dr} + (\varphi(R_3) + \tau(r)) \cdot r \right]. \quad (20)$$

Формулы (16), (17), (18) и (19) или (20) служат для определения остаточных напряжений во внешних слоях цилиндра. Для контроля эпюры $\tau_{\theta z}$ следует воспользоваться условием равновесия части цилиндра

$$\int_{R_1}^{R_2} r^2 \tau_{\theta z} dr = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Биргер, Остаточные напряжения. Машгиз, 1963.
2. С. Д. Пономарев и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Машгиз, том 1, 1956.
3. Н. Н. Давиденков, Н. Г. Мокневская, М. Н. Тимофеева. «Заводская лаборатория», № 6, 1948.