КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С. П. КОРОЛЕВА
*Труды, выпуск 48, 1971 г.*
Вопросы прочности элементов авиационных конструкций

**В. П. Иванов**

# ОБЩИЕ СВОЙСТВА СПЕКТРА СОБСТВЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ ЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ТЕЛ, ОБЛАДАЮЩИХ ЦИКЛИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

В технике широкое применение находят конструкции, обладающие циклической симметрией. В частности, к таким конструкциям относятся элементы роторов турбомашин — лопаточные венцы, крыльчатки, шнеки и т. п.

В настоящей статье выявляются некоторые общие свойства спектра собственных движений любых линейно-упругих циклически симметричных тел.

Знание этих свойств позволяет экономно строить решения конкретных задач о колебаниях таких систем, а также облегчает анализ результатов, полученных экспериментально.

## § 1. Циклическая симметрия

Упругое тело обладает циклической симметрией в том случае, если при повороте его вокруг некоторой оси, являющейся осью симметрии, на любой угол, кратный величине $\frac{2\pi}{S}$, где $S$ — некоторое целое число, упругие, массовые и геометрические характеристики его останутся инвариантными по отношению к неподвижной системе координат.

Целое число $S$ является порядком циклической симметрии. Наибольшее целое число $S$, присущее данному телу, является главным порядком его циклической симметрии. Если главный порядок симметрии тела является непростым числом, то такое тело может быть представлено как тело с симметрией некоторых других порядков. Любое тело может быть рассматриваемо как циклически симметричное с порядком симметрии $S=1$. Осесимметричные тела (диски, круговые оболочки и т. п.) трактуются нами как тела с главным порядком симметрии $S=\infty$. Естественно, что такие тела представимы как циклически симметричные с любым порядком симметрии.

Циклическая симметрия может быть прямой и винтовой. Так, например, прямой симметрией обладают цилиндрические и конические прямозубые шестерни, а винтовой — косозубые шестерни, многозаходные винты и т. п.

Для элементов роторов турбомашин порядок симметрии обычно совпадает с числом лопаток, их циклическая симметрия, как правило, бывает винтовой.

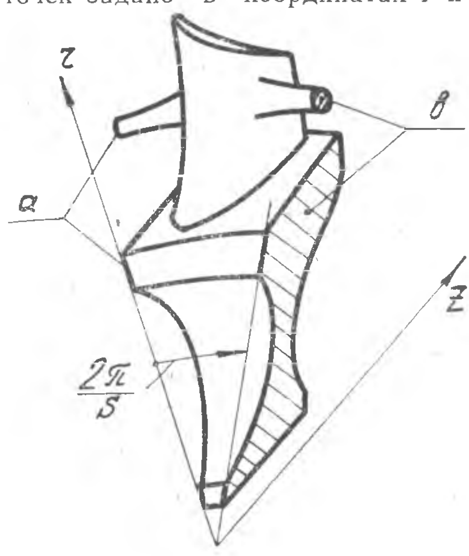
## § 2. Особенности спектра

На фиг. 1 показан период некоторого циклически симметричного тела, т. е. та часть его, которая заключена между двумя плоскостями, проходящими через ось симметрии и отстоящими друг от друга на угол $\frac{2\pi}{S}$.

В силу линейности структуры периода тела, между усилиями и перемещениями на его поверхностях $a$ и $в$, по которым данный период стыкуется с соседними, всегда существует линейная зависимость, которая может быть представлена в виде

$$\left\| \begin{matrix} q_a \\ q_b \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} T_{aa} & T_{ab} \\ T_{ba} & T_{bb} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} -Q_a \\ Q_b \end{matrix} \right\|. \qquad (1)$$

Здесь: $q_a\ (r, z)$ и $q_b\ (r, z)$ — векторные функции, характеризующие перемещения точек, расположенных на поверхностях $a$ и $b$ (невозмущенное положение точек задано в координатах r и z); $Q_a\ (r, z)$ и $Q_b\ (r, z)$ — векторные функции, характеризующие распределение усилий (напряжений), действующих на поверхностях, $a$ и $b$; $T_{aa}$, $T_{ab}$, $T_{ba}$, $T_{bb}$ — некоторые линейные операторы, конкретный вид которых определяется структурой периода тела.



Фиг. 1.

В силу теоремы взаимности, операторы $T_{ab}$ и $T_{ba}$ являются взаимно транспонированными, т. е. $T_{ab} = T_{ba}^T$.

Если усилия, действующие на элементы периода тела, являются гармоническими функциями времени, то, в силу линейности, гармоническими функциями времени будут и перемещения. Тогда зависимостью типа (1) можно связать амплитуды усилий и перемещений. В этом случае линейные операторы будут зависеть от частоты.

Если тело составлено из периодов, связанных между собой точечными связями, то линейными операторами в (1) будут матрицы динамических податливостей. Когда же связь между периодами носит распределенный характер, то операторами будут линейные интегральные операторы, ядра которых — гармонические функции влияния, образованные по типу тензоров Грина [1].

Перенумеровав периоды тела в направлении по часовой стрелке целыми числами $k=0, 1, 2,\ldots (S-1)$, а также имея в виду условие равновесия

$$Q_{ak} = Q_{b\,(k-1)}$$

и условие совместности деформаций

$$q_{ak} = q_{b\,(k-1)}$$

получим, учитывая (1):

$$q_{ak} = -T_{aa}Q_{ak} + T_{ab}Q_{a\,(k+1)},$$

$$q_{ak} = -T_{ba}Q_{a\,(k-1)} + T_{bb}Q_{ak}.$$

Исключив отсюда перемещения, будем иметь*:

$$-T_{ba}Q_{(k-1)} + (T_{aa}+T_{bb})\,Q_k - T_{ab}Q_{(k+1)} = 0. \tag{2}$$

Это выражение справедливо для любого периода тела. Поэтому при свободных колебаниях тела может быть записано S выражений такого вида, определяющих неизвестные внутренние усилия, действующие на поверхностях стыка периодов тела.

Решение системы S уравнений вида (2) может быть представлено в комплексном виде

$$Q_k = Pe^{i\mu k}\,, \tag{3}$$

где $P\ (r,\ z)$ — векторная комплексная функция, определяемая для поверхностей стыка, которая не зависит от номера k.

Параметр $\mu$ может быть определен из условия замкнутости:

$$Q_k = Q_{(k+S)}.$$

Тогда

$$e^{i\mu k} = e^{i\mu\,(k+S)},$$

откуда

$$\mu = \frac{2\pi}{S}\,m,$$

---

* Здесь и далее при усилиях индекс $a$ опущен.

где m — любое целое число.

Подставляя (3) в (2), найдем

$$[-e^{idm} T_{ba} + (T_{aa} + T_{bb}) - e^{-i\alpha m} T_{ab}]\, P = 0. \tag{4}$$

Здесь обозначено:

$$\alpha = \frac{2\pi}{S}.$$

Данное выражение справедливо для любого m. Поэтому, вообще говоря, может быть составлено бесчисленное множество уравнений типа (4), однако линейно независимыми из всего множества будут лишь S, соответствующих последовательности S целых чисел. В качестве этой последовательности удобно принять следующую последовательность:

$$-\frac{S}{2} < m \leqslant \frac{S}{2}. \tag{5}$$

Имея в виду, что

$$P = P^{*} + iP^{**}, \tag{6}$$

вместо (4) получим

$$\left.\begin{aligned} &[(T_{aa}+T_{bb}) - (T_{ba}+T_{ab})\cos\alpha m]\, P_m^{*} - [(T_{ba}-T_{ab})\sin\alpha m]\, P_m^{**} = 0 \\ &[(T_{ba}-T_{ab})\sin\alpha m]\, P_m^{*} + [(T_{aa}+T_{bb}) - (T_{ba}+T_{ab})\cos\alpha m]\, P_m^{**} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Отсюда следует уравнение частот

$$\begin{vmatrix} (T_{aa}+T_{bb}) - (T_{ba}+T_{ab})\cos\alpha m & -(T_{ba}-T_{ab})\sin\alpha m \\ (T_{ba}-T_{ab})\sin\alpha m & (T_{aa}+T_{bb}) - (T_{ba}+T_{ab})\cos\alpha m \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Для того, чтобы найти полный спектр собственных частот, необходимо разрешить, вообще говоря, S таких уравнений, соответствующих различным целым числам последовательности (5). Однако, как нетрудно видеть, для $m' = m$ и $m'' = -m$ уравнения (8) совпадут и поэтому дадут попарно совпадающие значения собственных частот. Тем не менее совпадающим собственным частотам будут соответствовать линейно-независимые решения. Так, если $m' = m$, то, учитывая (3), (6) и (8), получим

$$Q_k^{(m)} = A\left(P_m^{*} + iP_m^{**}\right) e^{i\alpha mk} \tag{9}$$

в то время, как при $m'' = -m$

$$Q_k^{(-m)} = B\,(P_m^{**} + iP_m^{*})\, e^{-i\alpha mk}. \tag{10}$$

Здесь A и B — константы, зависящие от начальных условий.

Функции $Q_k^{(m)}$ и $Q_k^{(-m)}$ линейно независимы. Их действительные части определяют формы свободных колебаний в усилиях

$$Q_k^{*(m)} = A\left[P_m^{*}\cos\alpha mk - P_m^{**}\sin\alpha mk\right], \tag{11}$$

$$Q_k^{*(-m)} = B\left[P_m^{**}\cos\alpha mk + P_m^{*}\sin\alpha mk\right]. \tag{12}$$

Аналогичные результаты могут быть получены и в перемещениях. Отсюда видно, что для получения полного спектра собственны движений циклически симметричного тела конкретное решени задачи с помощью (7) и (8) следует производить лишь для пос ледовательности целых положительных значений m, т. е. для

$$0 \leqslant m \leqslant \frac{S}{2}.$$

Другие решения могут быть найдены с точностью до постоян ного множителя путем сдвига уже полученных на угол $\frac{\pi}{2m}$ в ок ружном направлении.

## § 3. Заключение

На основе вышеизложенного можно сделать следующие выво ды об особенностях спектра собственных движений линейно-упру гих тел, обладающих циклической симметрией:

1) Распределение в окружном направлении амплитуд одних тех же компонентов усилий и перемещений в сходственных точка периодов тела при колебаниях по любой из собственных фор подчинено, как видно из (11) и (12), дискретному гармоническом закону с числом волн m. Иными словами, весь спектр собственны форм распадается на группы, каждой из которых присущ общи признак, указывающий на целое число волн, укладывающихся п окружности тела. Группе $m=0$ соответствует совокупность зонтич ных форм колебаний.

Важно отметить, что волны различных компонентов усилий перемещений, относящихся к данным сходственным точкам пери дов тела, могут иметь относительный сдвиг в окружном направле нии, отличный от $\frac{\pi}{2m}$ и $\frac{\pi}{m}$. Это видно из (11) и (12), так как функ ции P* и P** в общем случае независимы.

2) Число групп N, на которое распадается весь спектр, зависи от порядка симметрии. Их количество определяется плотно последовательностью целых чисел, удовлетворяющих услови

$$0 \leqslant m \leqslant \frac{S}{2}.$$

При четном порядке симметрии $N = \frac{S}{2} + 1$, а при нечетном — $N = \frac{S-1}{2} + 1$.

3) Число независимых собственных форм, входящих в данну группу, зависит от числа степеней свободы периода тела. Если пе риод тела имеет распределенные параметры, то число их не огра ничено.

4) К группам, удовлетворяющим условию $0<m<\frac{S}{2}$, принадлежат собственные частоты, каждой из которых соответствуют две линейно-независимые собственные формы. Иными словами, все собственные движения, если они не принадлежат к группам $m=0$ и $m=\frac{S}{2}$, имеют кратность собственных чисел не менее второй. Благодаря этому возможно проявление определенного многообразия в формах свободных колебаний, совершающихся с той или иной собственной частотой. В зависимости от начальных условий распределение амплитуд свободных колебаний по окружности тела может быть как фиксированным относительно него, так и вращающимся с угловой скоростью $\frac{p}{m}$ ($p$ — собственная частота), что соответствует образованию бегущей волны. В общем случае собственное колебание с частотой $p$ может проявиться как наложение этих двух характерных колебаний.

Указанные особенности спектра собственных движений присущи любым линейно-упругим телам, поскольку никаких ограничений, кроме линейности упругих характеристик, на структуру периода тела не накладывалось. На это было обращено внимание нами в [2].

Применительно к осесимметричным телам эти особенности спектра общеизвестны. В тех случаях, когда период циклически симметричной системы имеет стержневую структуру, те же свойства следуют из работы Б. А. Смольникова [3].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Курант и Д. Гильберт. Методы математической физики, том I, ГИТТЛ, 1951.
2. В. П. Иванов. О некоторых вибрационных свойствах упругих тел, обладающих циклической симметрией. Труды КуАИ, выпуск 29, Куйбышев, 1967.
3. Б. А. Смольников. Расчет свободных колебаний замкнутой рамной системы. Труды ЛПИ № 210, 1960.