Д. Н. НЕЗВАНОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ И ВНУТРЕННЕМ ДАВЛЕНИИ

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

x, y — координаты точек срединной поверхности оболочки; u, v — перемещения точек срединной поверхности в направлениях осей x, y; w — нормальное перемещение (перемещение w внутрь оболочки принимается положительным); R, l, t — радиус срединной поверхности, длина и толщина оболочки; m — число полуволн изогнутой поверхности на длине оболочки; n — число полных волн по окружности оболочки; E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки (при вычислениях принято $\mu = 0{,}3$); $D = \dfrac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$ — цилиндрическая жесткость; Δ — сближение торцов оболочки под нагрузкой; $\xi = \dfrac{\Delta R}{lt}$ — относительное сближение торцов; σ_x, σ_y — меридиальные и кольцевые напряжения в оболочке; N_x, N_y — меридиальные и кольцевые усилия; σ — средние сжимающие напряжения по торцу оболочки; p — внутреннее давление; $\bar{\sigma} = \dfrac{\sigma R}{Et}$ — параметр внешней осевой нагрузки; $\bar{p} = \dfrac{p}{E}\left(\dfrac{R}{t}\right)^2$ — параметр внутреннего давления;

$\Phi(x, y)$ — функция усилий $\left(N_x = \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2},\quad N_y = \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)$;

$L(A, B) = \dfrac{\partial^2 A}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 B}{\partial y^2} - 2\dfrac{\partial^2 A}{\partial x\partial y}\dfrac{\partial^2 B}{\partial x\partial y} + \dfrac{\partial^2 A}{\partial y^2}\dfrac{\partial^2 B}{\partial x^2}$ — оператор.

1. Вопросу устойчивости цилиндрических оболочек при осевом сжатии и внутреннем давлении посвящено большое число работ. Перечень их приведен в обзоре [4]. Несмотря на свою актуальность и многочисленные исследования, данная задача, однако, не может считаться решенной. В настоящее время не существует общепринятой методики учета влияния внутреннего давления на величину критических напряжений осевого сжатия.

Из имеющихся теоретических исследований следует отметить работу Тилеманна [9]. Полученные им результаты оказались близкими к экспериментальным данным и были рекомендованы для практических расчетов на устойчивость [1, 3, 7 и др.]. Однако необходимо иметь в виду, что решение Тилеманна получено методом Ритца и, следовательно, соответствует конкретной форме изогнутой поверхности оболочки, определяемой принятой функцией прогиба w по Кемпнеру [8]. Для других форм изогнутой поверхности результаты могут оказаться иными.

В настоящей работе задача устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии в сочетании с внутренним давлением решается при различных вариантах аппроксимирующего выражения для функции прогиба. Решение проводится в геометрически нелинейной постановке методом Ритца. Вводятся общепринятые допущения о тонкостенности оболочки, о малости перемещений u и v по сравнению с w и об упругости деформаций. Для решения используются известные соотношения нелинейной теории пологих оболочек [3].

2. Пусть имеется цилиндрическая оболочка, нагруженная осевыми сжимающими усилиями N и внутренним давлением p. Рассмотрим складчатое равновесное состояние оболочки под нагрузкой. Радиальные перемещения w представим в виде тригонометрического многочлена

$$w = \sum_{q=0}^{q_п} \sum_{k=0}^{k_п} a_{qk} \cos \frac{qm\pi x}{l} \cos \frac{kny}{R}, \quad q + k = 0, 2\ 4, 6..,$$

где a_{qk} — амплитуды прогиба;

$q_п$, $k_п$ — предельные значения q и k.

Ограничиваясь значением $q + k = 4$ и вводя обозначения $r = m\pi \frac{R}{l}$ и $\alpha_{qk} = a_{qk} n^2/R$, получим

$$w = \frac{R}{n^2} \sum_{q=0}^{4} \sum_{k=0}^{4} \alpha_{qk} \cos \frac{qrx}{R} \cos \frac{kny}{R} \cdot$$

Принятое для функции прогиба выражение (1) содержит 9 членов с соответствующими безразмерными коэффициентами α_{00}, α_{11}, α_{20}, α_{02}, α_{22}, α_{40}, α_{04}, α_{13} и α_{31}. В частных случаях, приравнивая часть коэффициентов нулю, получим различные варианты решения задачи, отличающиеся формой изогнутой поверхности оболочки.

Подстановка (1) в уравнение совместности деформаций

$$\frac{\nabla^4 \Phi}{Et} = -\frac{1}{2} L(w, w) - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

с учетом $N_x = -\sigma t$, $N_y = pR$ и обозначений $\vartheta = r/n$, $\eta = n^2 t/R$ позволяет получить следующее выражение для функции усилий:

$$\Phi = -\sigma t \frac{y^2}{2} + pR \frac{x^2}{2} - \frac{E t^3}{\vartheta^2 \eta^2} \sum_{i=0}^{7} \sum_{j=0}^{7} C_{ij} G_{ij} \cos \frac{irx}{R} \cos \frac{jny}{R}. \qquad (2)$$

Здесь $i + j = 2, 4, 6$ и 8 (за исключением $i = 0$, $j = 8$ и $i = 8$, $j = 0$),

$$C_{ij} = \frac{\vartheta^4}{[(i\vartheta)^2 + j^2]^2},$$

G_{ij} – коэффициенты, зависящие только от α_{qk} (из-за громоздкости не приводятся).

Потенциальная энергия деформации растяжения—сжатия срединной поверхности

$$U_c = \frac{1}{2Et} \iint\limits_{x\,y} [(\nabla^2\Phi)^2 - (1 + \mu) L(\Phi, \Phi)]\, dxdy$$

после подстановки выражения (2) примет в безразмерной форме вид

$$\overline{U}_c = \frac{U_c R}{Et^3 \pi l} = \bar{\sigma}^2 + \bar{p}^2 + 2\mu\bar{\sigma}\bar{p} + \frac{1}{\eta^2} \sum_{i=0}^{7} \sum_{j=0}^{7} \frac{C_{ij} G_{ij}^2}{2(1 + \xi)}, \qquad (3)$$

где $\xi = 0$ при $ij = 0$ и $\xi = 1$ при $ij \neq 0$.

Потенциальная энергия деформации изгиба

$$U_и = \frac{D}{2} \iint\limits_{x\,y} [(\nabla^2 w)^2 - (1 - \mu) L(w, w)]\, dxdy$$

после подстановки (1) запишется в виде

$$\overline{U}_и = \frac{U_и R}{Et^3 \pi l} = \frac{\vartheta^4}{12(1-\mu^2)} \sum_{q=0}^{4} \sum_{k=0}^{4} \frac{\alpha_{qk}^2}{2(1 + \xi) C_{qk}}. \qquad (4)$$

Здесь $\xi = 0$ при $qk = 0$ и $\xi = 1$ при $qk \neq 0$.

Для потенциала внешних осевых сжимающих усилий

$$W_N = -\frac{1}{Et} \iint\limits_{y\,x} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)_{x=0} \left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{Et}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] dx\, dy$$

и потенциала внутреннего давления $W_p = \iint\limits_{x\,y} pw\, dx\, dy$

с учетом (1) и (2) получим следующие выражения:

$$\overline{W}_N = \frac{W_N R}{Et^3 \pi l} = -2\bar{\sigma}^2 - 2\mu\bar{\sigma}\bar{p} - \frac{\bar{\sigma}\vartheta^2}{\eta} \sum_{q=0}^{4} \sum_{k=0}^{4} \frac{q^2 \alpha_{qk}^2}{2(1 + \xi)}; \qquad (5)$$

$$\overline{W}_p = \frac{W_p R}{Et^3 \pi l} = -2\bar{p}^2 - 2\mu\bar{\sigma}\bar{p} + \frac{\bar{p}}{\eta} \sum_{q=0}^{4} \sum_{k=0}^{4} \frac{k^2 \alpha_{qk}^2}{2(1 + \xi)}. \qquad (6)$$

На основании выражений (3), (4), (5) и (6) вычисляем в безразмерной форме полную энергию системы

$$\overline{Э} = \frac{ЭR}{Et^3 \pi l} = \overline{U}_c + \overline{U}_и + \overline{W}_N + \overline{W}_p.$$

Условие минимума энергии позволяет записать соотношения

$$\frac{\partial \overline{Э}}{\partial \alpha_{qk}} = \frac{\partial \overline{Э}}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \overline{Э}}{\partial \eta} = 0. \qquad (7)$$

3. Выражение (7) представляет собой систему десяти нелинейных алгебраических уравнений с двенадцатью произвольными параметрами α_{11}, α_{20}, α_{02}, α_{22}, α_{40}, α_{04}, α_{13}, α_{31}, ν, η, $\bar{\sigma}$ и $\bar{p}$, характеризующими закритическое складчатое равновесное состояние оболочки. Решая систему при различных фиксированных значениях $\bar{\sigma}$ и $\bar{p}$, получим численные величины остальных параметров. Для решения системы (7) применим метод последовательных приближений Ньютона [5].

Пусть имеется система n нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0. \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Совокупность искомых неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и функций f_1 $f_2, \ldots, f_n$ можно рассматривать как n-мерные векторы

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ и } F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}.$$

Тогда формула для определения приближенных значений корней системы (8) методом Ньютона при $(m+1)$-ом приближении запишется в виде ,

$$X^{(m+1)} = X^{(m)} - W^{-1}(X^{(m)})\ \ F(X^{(m)}),\ m = 0, 1, 2, 3\ldots \tag{9}$$

где W^{-1} — матрица, обратная матрице Якоби

$$W(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Вычисления, связанные с решением системы уравнений (7) по формуле (9), проводились на ЭВМ М-220. Было рассмотрено 18 вариантов аппроксимирующего выражения для функции прогиба w. При этом число членов ряда (1) изменялось от 3 до 9. Результаты вычислений для случая $p=0$ сведены в таблицу 1, где знаком плюс указаны удержанные члены α_{qk} и даны значения нижних критических нагрузок $\sigma_н$ каждого варианта, а также величин ϑ, ζ и w_{max}/t, соответствующих этим нагрузкам. Величина ϑ равна отношению длин полуволн вмятин в окружном и осевом направлениях, а прогиб w_{max} соответствует впадинам изогнутой поверхности оболочки. Таблица 1 позволяет судить о роли отдельных членов ряда (1) и отражает общую тенденцию к понижению критических нагрузок с ростом числа членов ряда, хотя в отдельных случаях введение новых членов несколько повышало $\sigma_н$.

Таблица

Вариант	Число членов ряда (I)	Члены ряда α_{qk}									$\bar{\sigma}_н$	$\frac{\bar{\sigma}_н}{\bar{\sigma}_в}$	$\frac{w_{max}}{t}$	ϑ	ζ
		α_{00}	α_{11}	α_{20}	α_{02}	α_{22}	α_{40}	α_{04}	α_{13}	α_{31}					
I	3	+	+	+	—	—	—	—	—	—	0,1946	0,322	7,8	0,407	0,452
II	4	+	+	+	+	—	—	—	—	—	0,1824	0,301	9,1	0,388	0,398
III	4	+	+	+	—	+	—	—	—	—	0,1019	0,168	20,0	0,302	0,553
IV	4	+	+	+	—	—	+	—	—	—	0,1752	0,290	8,5	0,400	0,460
V	4	+	+	+	—	—	—	—	+	—	0,1931	0,319	7,8	0,412	0,459
VI	4	+	+	+	—	—	—	—	—	+	0,1530	0,253	8,7	0,387	0,400
VII	5	+	+	+	+	+	—	—	—	—	0,1050	0,174	20,4	0,362	0,826
VIII	5	+	+	+	+	—	+	—	—	—	0,1699	0,281	9,4	0,386	0,404
IX	5	+	+	+	+	—	—	—	+	—	0,1782	0,294	9,0	0,404	0,416
X	5	+	+	+	—	+	+	—	—	—	0,0949	0,157	35,5	0,232	0,530
XI	6	+	+	+	+	+	+	—	—	—	0,0989	0,163	33,5	0,267	0,722
XII	6	+	+	+	+	+	—	+	—	—	0,1029	0,170	20,5	0,372	0,883
XIII	6	+	+	+	+	—	+	+	—	—	0,1700	0,281	9,4	0,389	0,410
XIV	6	+	+	+	+	—	—	—	+	+	0,1497	0,247	9,4	0,394	0,396
XV	7	+	+	+	+	+	+	+	—	—	0,0956	0,158	32,8	0,284	0,792
XVI	7	+	+	+	+	—	—	+	+	+	0,1497	0,247	9,4	0,394	0,396
XVII	8	+	+	+	+	+	+	+	+	—	0,0960	0,159	32,8	0,278	0,747
XVIII	9	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0,0988	0,163	23,1	0,312	0,632

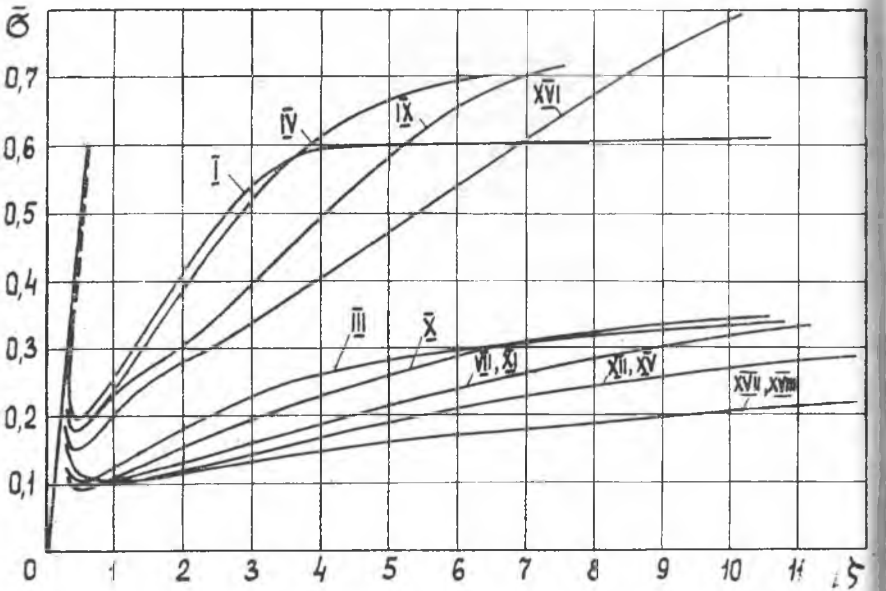

Рис. 1.

На рис. 1 для некоторых вариантов показано изменение пара-метра внешней осевой нагрузки $\bar{\sigma}$ в зависимости от относительного сближения торцов оболочки ζ. Прямолинейный участок, идущий из начала координат и достигающий верхней критической нагрузки соответствует равновесным состояниям цилиндрической оболочки до выпучивания. Криволинейные участки представляют собой вет-ви закритических изогнутых равновесных форм. Большинство за-критических ветвей не связано с верхней критической нагрузкой, лишь кривые вариантов I и II сливаются с ней. Ветви образуют два семейства кривых. Кривые нижнего семейства отличаются на-личием в функции прогиба члена α_{22}, роль которого уже отмеча-лась в работе [6].

Согласно табл. 1 и рис. 1 нижние критические напряжения при $p=0$ для рассмотренных вариантов лежат в диапазоне $(0{,}1\div0{,}2)Et/R$. Такие же критические нагрузки реализуются в экс-периментах у оболочек с $150\leqslant R/t\leqslant1000$, представляющих наи-больший практический интерес. Это дает основание ограничиться рассмотренными вариантами и применить их для исследования ус-тойчивости при внутреннем давлении в оболочке.

При $p\neq0$ закритические ветви меняют свои очертания, а ниж-ние критические нагрузки возрастают. Увеличение нижних крити-ческих нагрузок осевого сжатия в зависимости от внутреннего дав-ления показано для некоторых вариантов функции прогиба на

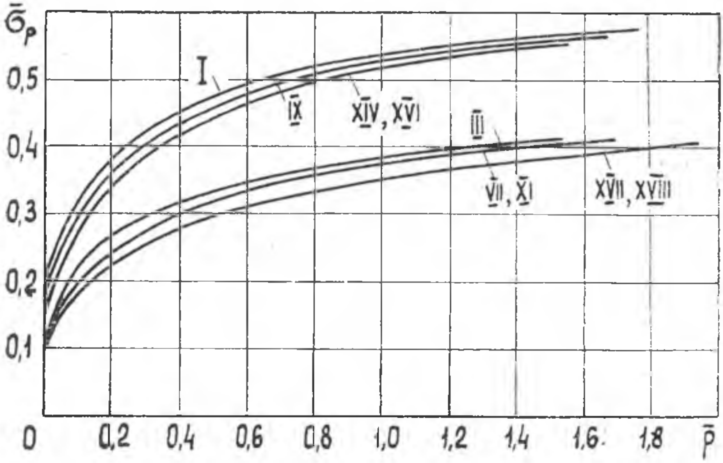

Рис. 2.

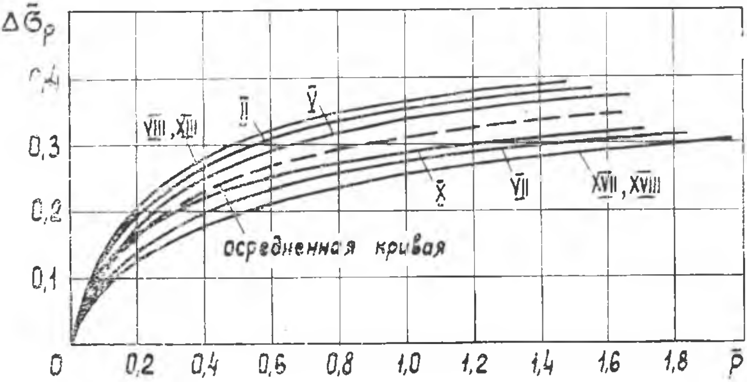

Рис. 3.

рис. 2. При малых значениях параметра давления $\bar{p}$ наблюдается интенсивное возрастание $\bar{\sigma}_p$, затем этот рост замедляется, при дальнейшем увеличении $\bar{p}$ параметр $\bar{\sigma}_p$ не превосходит верхней критической нагрузки. Вновь можно заметить два семейства кривых, отмеченных выше.

Вычислим величину приращения нижней критической нагрузки каждого варианта в зависимости от внутреннего давления

$$\Delta\bar{\sigma}_p = \bar{\sigma}_p - \bar{\sigma}_0 ,$$

где $\bar{\sigma}_0$ соответствует случаю $p=0$.

Согласно рис. 3, значения $\Delta\bar{\sigma}_p$ разных вариантов оказываются сравнительно близкими. Это позволяет провести осредненную кривую (пунктирная линия на рис. 3), которая может быть аппроксимирована приближенной зависимостью

$$\Delta\bar{\sigma}_p = \frac{0,4\bar{p}}{\bar{p}+0,3}.$$

Тогда критические напряжения осевого сжатия с учетом внутреннего давления будут определяться формулой

$$\sigma_{kp}^{p\neq 0} = \left(c + \frac{0,4\bar{p}}{\bar{p}+0,3}\right)\frac{Et}{R}.$$

Здесь c — коэффициент устойчивости для случая $p=0$. Как известно, величина c в основном зависит от начальных несовершенств оболочки, сильнее проявляющихся при больших значениях R/t. Рекомендуемые для практических расчетов значения c в функции от R/t приведены в работах [2, 3 и др.]. Обработка этих данных позоляет в диапазоне $100 \leqslant R/t \leqslant 1000$ принять следующую приближенную зависимость c от R/t:

$$c = \frac{150}{\frac{R}{t}+580}.$$

Все вышеизложенное справедливо лишь в пределах упругости. При больших значениях внутреннего давления интенсивность напряжений в оболочке может достигнуть предела текучести материала. Дальнейший рост внутреннего давления приведет к падению критических напряжений осевого сжатия [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Шнейдерович Р. М. Расчет на прочность деталей машин. «Машиностроение», 1966.

2. Броуде Б. М. Практические методы расчета тонких оболочек на устойчивость. Исследования по стальным конструкциям, вып. 13. Госстройиздат, 1962.

3. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. «Наука», 1967.

4. Григолюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость круговых цилиндрических оболочек. Итоги науки. Механика твердых деформируемых тел. 1967, Москва, 1969.

5. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. Физматгиз, 1963.

6. Названов Д. Н. Об устойчивости цилиндрических оболочек при осевом сжатии. Труды Куйбышевского авиационного института, вып. 39, 1968.

7. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник, том. 3. «Машиностроение», 1968.

8. I. Kempner. Postbuckling behavior of axially compressed shells. IAS, v. 21, № 5, 1954. (Русский перевод в сборнике «Механика», вып. 2, 1955).

9. W. F. Thielemann. New developments in the nonlinear theories of the buckling of thin cylindrical shells. «Aeronautics and Astronautics», Pergamon—Press, 1960.