

Д. Н. НЕЗВАНОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ

В данной работе определяются закритические характеристики изотропной круговой цилиндрической оболочки, нагруженной осевым сжатием. Проводится сравнение двух вариантов решения задачи, отличающихся количеством членов в аппроксимирующем выражении для прогиба.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

x, y, z — координаты точек срединной поверхности оболочки;

R, l — радиус срединной поверхности и длина оболочки;

t — толщина стенки оболочки;

m — число полуволн изогнутой поверхности цилиндра вдоль его длины;

n — число полных волн по окружности цилиндра;

$\lambda_x = \frac{l}{m}$ — длина полуволны изогнутой поверхности в осевом направлении;

$\lambda_y = \frac{\pi R}{n}$ — длина полуволны по окружности;

$\bar{x} = \frac{x}{\lambda_x}, \bar{y} = \frac{y}{\lambda_y}$ — безразмерные координаты;

u, v, w — перемещения точек срединной поверхности в направлениях осей x, y, z (перемещение w внутрь оболочки считается положительным);

E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки (в последующих вычислениях принято $\mu = 0,3$);

$D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$ — цилиндрическая жесткость оболочки;

σ_1, σ_2, τ — осевые, окружные и сдвигающие напряжения в срединной поверхности оболочки;

$\Phi(x, y)$ — функция напряжений;

$$L(A, B) = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - \text{оператор};$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \text{оператор Лапласа};$$

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} - \text{двойной оператор Лапласа.}$$

* * *

Исследование устойчивости «в малом» изотропных круговых цилиндрических оболочек, нагруженных осевым сжатием, приводит к величине критического напряжения:

$$\sigma_{кр} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \frac{Et}{R} \approx 0,605 \frac{Et}{R}. \quad (1)$$

Данное значение не нашло экспериментального подтверждения. Причиной расхождения явилась неприемлемость к данной задаче «классической» теории устойчивости, оперирующей с линейными уравнениями и считающей пределом устойчивости точку бифуркации, т. е. момент появления смежных равновесных форм. В экспериментах такая форма потери устойчивости не реализуется, а происходит «хлопок» оболочки в новое, несмежное изогнутое равновесное состояние, характерное большими прогибами. Описание таких прогибов возможно лишь с помощью нелинейной теории оболочек.

Первыми применили нелинейную теорию для решения данной задачи Карман и Цянь Сюэ-сень [1], показавшие, что цилиндрическая оболочка после потери устойчивости может сохранять равновесие под действием осевых сжимающих напряжений, лежащих значительно ниже (1). Минимальная сжимающая нагрузка, удерживающая оболочку в новом изогнутом равновесном состоянии, получила название «нижней» критической нагрузки в отличие от «верхней» (1). Примененный Карманом и Цянь Сюэ-сеном энергетический метод решения с варьированием полной энергии системы по параметрам прогиба оболочки (метод Ритца) был усовершенствован в работах [2], [3], [4] и др.

В большинстве исследований радиальное перемещение представляется двойным тригонометрическим рядом Фурье:

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} A_{kj} \cos\left(k \frac{m\pi x}{l}\right) \cos\left(j \frac{n\pi y}{R}\right) \quad k + j \text{ четное.} \quad (2)$$

Форма прогиба (2) отображает наблюдаемый при потере устойчивости ромбический характер вмятин. Требование $k + j = 0, 2, 4, 6, \dots$ вытекает из условия симметрии и периодичности картины складкообразования. В первых исследованиях число удержанных членов ряда (2) не превышало трех-четырёх. В зависимости от

вида функции различные решения приводили к различным значениям нижних критических нагрузок. До 1963 г. полученные значения лежали в диапазоне от $\sigma_{kp} = 0,182 Et/R$ (решение Кемпнера [3]) до $\sigma_{kp} = 0,334 Et/R$ (решение Агамирова [4]). Разброс полученных величин объяснялся более или менее удачной аппроксимацией действительной картины волнообразования оболочки. При этом негласно подразумевалось, что существует одна, вполне определенная нижняя критическая нагрузка и для более точного ее определения следует лишь уточнить функцию прогиба, т. е. удержать в выражении (2) большее число членов. Однако учет каждого нового члена резко усложнял задачу. Лишь в последние годы удалось с помощью электронных цифровых вычислительных машин преодолеть эти трудности. Полученные результаты оказались неожиданными. В работе Элмроса [8] было показано, что с ростом числа членов в аппроксимирующем выражении для прогиба величина нижней критической нагрузки неуклонно падает. Для случая десяти членов ряда (2) она оказалась равной $\sigma_{kp} = 0,0652 Et/R$. Позднее Хофф, Мэдсен и Мейерс [9] для пятнадцати членов получили $\sigma_{kp} = 0,0427 Et/R$. Отсюда можно сделать вывод, что в закритической области существует множество ветвей изогнутых равновесных форм и соответственно множество нижних критических нагрузок. Однако малые значения полученных критических напряжений и несоответствие их экспериментальным данным говорят о том, что задача устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии по-прежнему далека от окончательного решения. Не касаясь вопроса о возможных путях решения этой проблемы, отметим лишь необходимость новых дополнительных исследований всего многообразия закритических равновесных форм.

В настоящей работе исследуется одна из ветвей закритических равновесных форм, соответствующая аппроксимации функции прогиба пятью членами ряда (2): $A_{11}, A_{20}, A_{02}, A_{22}, A_{00}$. Задача решается в нелинейной постановке, по схеме, изложенной в работах [1], [2], [3], [4]. Вводятся общепринятые в теории оболочек допущения о тонкостенности оболочки ($t/R < 1/20$), о малости перемещений u и v по сравнению с w и об упругости деформаций. Для решения используются известные зависимости нелинейной теории пологих оболочек [4], [7]. Запишем основные из них.

Напряжения в срединной поверхности оболочки, выраженные через функцию напряжений:

$$\sigma_1 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_2 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (3)$$

Уравнение совместности деформаций:

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -\frac{1}{2} L(w, w) - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (4)$$

Потенциальная энергия деформации срединной поверхности оболочки:

$$U_c = \frac{t}{2E} \int_0^l \int_0^{2\pi R} [(\nabla^2 \Phi)^2 - (1 + \mu) L(\Phi, \Phi)] dx dy. \quad (5)$$

Потенциальная энергия изгиба:

$$U_u = \frac{D}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi R} [\nabla^2 w]^2 - (1 - \mu) L(w, w)] dx dy. \quad (6)$$

Сближение торцов оболочки:

$$\Delta = -\frac{1}{E} \int_0^l \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{E}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx. \quad (7)$$

Работа внешних усилий:

$$A = \frac{t}{E} \int_0^l \int_0^{2\pi R} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_{x=0} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{E}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy. \quad (8)$$

С учетом обозначения $r = m\pi R/l$ выражение для радиального прогиба оболочки принимаем в виде:

$$\begin{aligned} \frac{w}{t} = & a \cos \frac{rx}{R} \cos \frac{ny}{R} + b \cos \frac{2rx}{R} + c \cos \frac{2ny}{R} + \\ & + d \cos \frac{2rx}{R} \cos \frac{2ny}{R} + e, \end{aligned} \quad (9)$$

где a, b, c, d, e — безразмерные амплитуды прогибов.

Следует отметить, что из функции прогиба (9), как частные случаи, вытекают аппроксимирующие выражения для w , принятые в работах [1], [2], [3], [4].

Функция напряжений определяется путем подстановки выражения (9) в уравнение совместности деформаций (4) с последующим интегрированием:

$$\begin{aligned} \Phi = & -Et^2 \left[\frac{ar^2 (2bn^2 + 2cn^2 - \frac{R}{t})}{(r^2 + n^2)^2} \cos \frac{rx}{R} \cos \frac{ny}{R} + \right. \\ & \left. + \frac{n^2 (a^2 + 16cd) - 8b \frac{R}{t}}{32r^2} \cos \frac{2rx}{R} + \frac{r^2 (a^2 + 16bd)}{32n^2} \cos \frac{2ny}{R} + \right. \\ & \left. + \frac{r^2 (bcn^2 - \frac{d}{4} \frac{R}{t})}{(r^2 + n^2)^2} \cos \frac{2rx}{R} \cos \frac{2ny}{R} + \frac{2ar^2 n^2 (b + 2d)}{(9r^2 + n^2)^2} \cos \frac{3rx}{R} \cos \frac{ny}{R} + \right. \\ & \left. + \frac{(2ar^2 n^2 (c + 2d))}{(r^2 + 9n^2)^2} \cos \frac{rx}{R} \cos \frac{3ny}{R} + \frac{d^2 n^2}{32r^2} \cos \frac{4rx}{R} + \frac{d^2 r^2}{32n^2} \cos \frac{4ny}{R} + \right. \\ & \left. + \frac{bdr^2 n^2}{2(4r^2 + n^2)^2} \cos \frac{4rx}{R} \cos \frac{2ny}{R} + \frac{cdr^2 n^2}{2(r^2 + 4n^2)^2} \cos \frac{2rx}{R} \cos \frac{4ny}{R} \right] - \frac{\sigma y^2}{2}. \quad (10) \end{aligned}$$

Важно отметить, что используемые при интегрировании статические граничные условия (при $x=0$ $\sigma_1 = \partial^2 \phi / \partial y^2 = -\sigma$) удовлетворяются лишь интегрально, т. е. в выражении (10) под σ следует понимать среднее значение сжимающих напряжений в торцевых сечениях оболочки.

Параметр e в выражении (9), соответствующий среднему перемещению срединной поверхности оболочки, не является независимым и из условия периодичности перемещения v по координате y может быть выражен через остальные параметры прогиба:

$$e = \frac{n^2 t}{8R} (a^2 + 8c^2 + 4d^2) - \mu \frac{\sigma R}{Et}. \quad (11)$$

Величина относительного сближения кромок $\xi = \Delta/l$ также выражается через параметры прогиба с помощью (7), (9), (10):

$$\frac{\xi R}{t} = \frac{r^2 t}{8R} (a^2 + 8b^2 + 4d^2) + \frac{\sigma R}{Et}. \quad (12)$$

Вводим следующие безразмерные параметры:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \frac{\sigma R}{Et}; & \vartheta &= \frac{m\pi R}{nt} = \frac{r}{n} = \frac{\lambda_y}{\lambda_x}; & \eta &= \frac{n^2 t}{R}; \\ \alpha &= a\eta; & \beta &= b\eta; & \gamma &= c\eta; & \delta &= d\eta; & \varepsilon &= e\eta. \end{aligned} \quad (13)$$

Параметр $\bar{\sigma}$ характеризует средние напряжения осевого сжатия. Параметры ϑ и η , заменяя собой параметры m и n , характеризуют количество и размеры вмятин. Особой наглядностью отличается параметр ϑ , представляющий собой отношение длины полуволны в окружном направлении к длине полуволны в осевом направлении. Параметры $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ характеризуют глубину и форму поверхности вмятин.

С учетом (3) и (13) запишем выражение для осевых мембранных напряжений σ_1^0 в поперечных сечениях оболочки $x=0, 2, 4, \dots$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1^0 R}{Et} &= -\bar{\sigma} + \frac{\vartheta^2}{\eta} \left\{ \alpha \left[\frac{2(\beta + \gamma) - 1}{(1 + \vartheta^2)^2} + \frac{2(\beta + 2\delta)}{(1 + 9\vartheta^2)^2} \right] \cos \pi \bar{y} + \right. \\ &\quad + \left[\frac{\alpha^2}{8} + \frac{4\beta\gamma - \delta}{(1 + \vartheta^2)^2} + 2\beta\delta + \frac{2\beta\delta}{(1 + 4\vartheta^2)^2} \right] \cos 2\pi \bar{y} + \\ &\quad \left. + \frac{18\alpha(\gamma + 2\delta)}{(9 + \vartheta^2)} \cos 3\pi \bar{y} + \left[\frac{\delta^2}{2} + \frac{8\gamma\delta}{(4 + \vartheta^2)^2} \right] \cos 4\pi \bar{y} \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Полная энергия системы

$$\mathcal{E} = U_c + U_u - A. \quad (15)$$

определяется путем подстановки выражений (9), (10) в уравнения (5), (6), (8) с учетом (13):

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{Et^3 \pi l}{R} \left\{ \frac{1}{3(1-\mu^2)} \left[\frac{\alpha^2(1+\vartheta^2)^2}{16} + 2\beta^2 \vartheta^4 + 2\gamma^2 + \delta^2(1+\vartheta^2)^2 \right] - \right. \\ & - \bar{\sigma}^2 - \frac{\vartheta^2 \sigma}{\eta} \left[\frac{\alpha^2}{4} + 2\beta^2 + \delta^2 \right] + \frac{1}{\eta^2} \left[\frac{\alpha^4(1+\vartheta^4)}{128} + \frac{\alpha^2 C_{11}}{4} - \right. \\ & - \frac{\alpha^2 \beta}{8}(1+8C_{11}) + \alpha^2 \beta^2 (C_{11} + C_{19}) + \frac{\beta^2}{2} - \\ & - \alpha^2 \gamma C_{11} + \alpha^2 \gamma^2 (C_{11} + C_{91}) + 2\alpha^2 \beta \gamma C_{11} + 4\beta^2 \gamma^2 C_{11} + \frac{\vartheta^4(1+\vartheta^4)}{8} + \\ & + \frac{\delta^2}{4} C_{11} + 4\alpha^2 \delta^2 (C_{19} + C_{91}) + \frac{\alpha^2 \beta \delta}{4} (\vartheta^4 + 16C_{19}) + \\ & + 2\beta^2 \delta^2 \left(\vartheta^4 + \frac{C_{14}}{2} \right) + \frac{\alpha^2 \gamma \delta}{4} (1 + 16C_{91}) + \\ & \left. + 2\gamma^2 \delta^2 \left(1 + \frac{C_{41}}{2} \right) - 2\beta \gamma \delta (1 + C_{11}) \right\}, \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{где } C_{11} = \frac{\vartheta^4}{(1+\vartheta^2)^2}, \quad C_{14} = \frac{\vartheta^4}{(1+4\vartheta^2)^2}, \quad C_{41} = \frac{\vartheta^4}{(4+\vartheta)^2}, \\ C_{19} = \frac{\vartheta^4}{(1+9\vartheta^2)^2}, \quad C_{91} = \frac{\vartheta^4}{(9+\vartheta^2)^2}. \quad (17) \end{aligned}$$

Выражение (16) содержит шесть неизвестных параметров прогиба оболочки α , β , γ , δ , η , ϑ , определяемых из условия минимума полной энергии системы. Это условие приводит к следующим соотношениям:

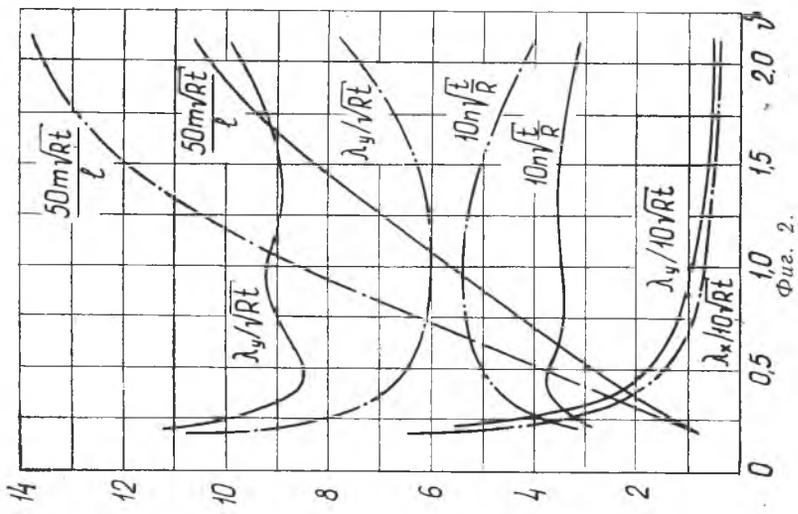
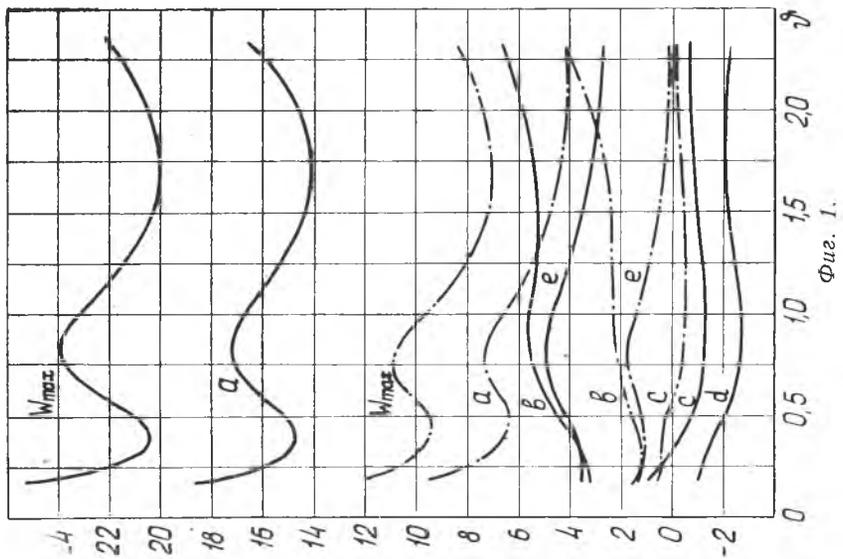
$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \beta} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \gamma} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \delta} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \eta} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vartheta} = 0. \quad (18)$$

Выражение (18) представляет собой систему шести нелинейных алгебраических уравнений относительно α , β , γ , δ , η , ϑ . Параметр внешней нагрузки $\bar{\sigma}$ считается заданным. Однако, поскольку параметр ϑ входит в уравнения (18) в сложной зависимости, то обычно решают систему относительно параметров α , β , γ , δ , η , $\bar{\sigma}$ при фиксированных значениях ϑ .

Система уравнений (18) решалась на ЭЦВМ «М-20». Результаты численного решения представлены на фиг. 1—7.

Штрих-пунктирные кривые соответствуют результатам работы Кемпнера [3], представляющей собой одно из наиболее тщательных исследований данной задачи. В решении Кемпнера функция прогиба аппроксимирована четырьмя членами: A_{11} , A_{20} , A_{02} , A_{00} и может быть получена из (9), если положить $d=0$. Сравнение показывает, что увеличение числа членов в аппроксимирующем выражении для прогиба с четырех до пяти приводит к значительным отличиям конечных результатов решения.

На фиг. 1 приведены значения параметров a , b , c , d , e в зави-



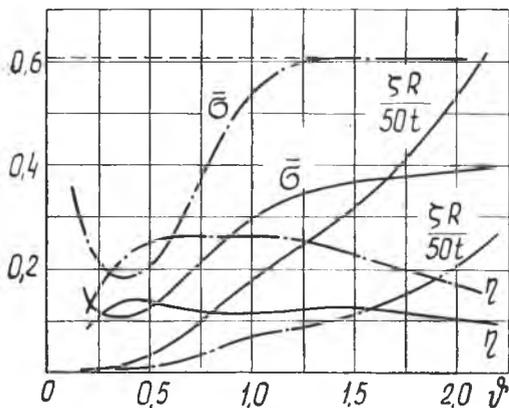
симости от отношения длин волн ϕ . По кривым фиг. 1 можно судить о сравнительной величине и роли каждого члена в принятом аппроксимирующем выражении для прогиба (9). Наибольшей величиной отличается параметр a , наименьшую роль играет параметр c . Там же приведено изменение максимального прогиба ω_{\max} , соответствующего вмятинам изогнутой поверхности. В данном решении прогиб в 20—25 раз превышает толщину оболочки, тогда как в решении Кемпнера он достигает лишь 7—11 толщин.

На фиг. 2 приведены значения параметров m , n , λ_x и λ_y в функции от параметра ϕ . Размеры вмятин в данном решении оказались больше, чем в решении Кемпнера, а числа волн соответственно меньше.

Изменение величины приложенного к оболочке напряжения, относительного сближения кромок, а также параметра η , характеризующего число волн по окружности, в зависимости от отношения длин волн ϕ приведено на фиг. 3. Минимальная величина приложенного к оболочке среднего сжимающего напряжения, при которой становится возможным существование изогнутого равновесного состояния, в данном решении оказалась равной $\sigma_{\min} = 0,105$ (при $\phi = 0,36$), что существенно отличается от результата Кемпнера $\sigma_{\min} = 0,182$.

Известно, что цилиндрические оболочки в основном теряют устойчивость при напряжениях сжатия, лежащих в диапазоне $(0,1 - 0,3) Et/R$. Полученное в данном решении значение параметра σ_{\min} соответствует нижней границе этого диапазона. (В работе [8] в варианте решения с пятью членами ряда (2), несколько отличающимися от принятой нами аппроксимации прогиба, было найдено $\bar{\sigma}_{\min} = 0,0949$). Согласно экспериментальным данным, приведенным в работе [5], и практическим рекомендациям, изложенным в [6], такие критические нагрузки реализуются у оболочек с $750 < R/t < 1500$.

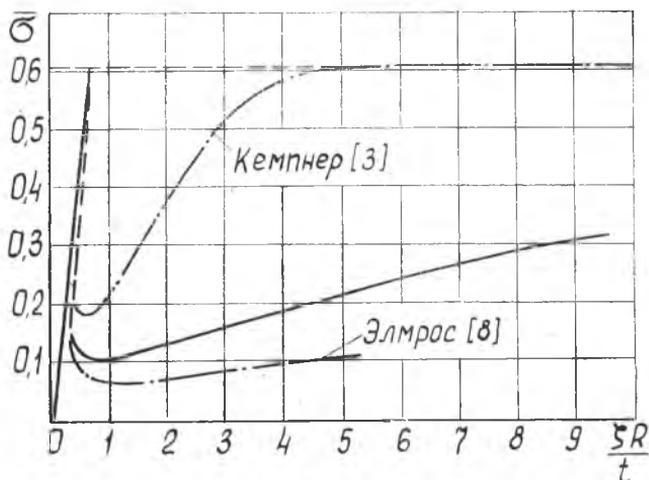
На фиг. 4 приведено изменение приложенного к оболочке среднего сжимающего напряжения в зависимости от относительного сближения торцов оболочки. Там же для сравнения приведены соответствующие кривые, полученные в работах Кемпнера [3] и Элмроса [8] (вариант решения задачи с аппроксимацией прогиба ω десятью членами). Прямолинейный



Фиг. 3.

участок, идущий из начала координат и достигающий значения верхней критической нагрузки, соответствует формам оболочки до выпучивания. Криволинейные участки представляют собой ветви закритических изогнутых равновесных состояний цилиндрической оболочки.

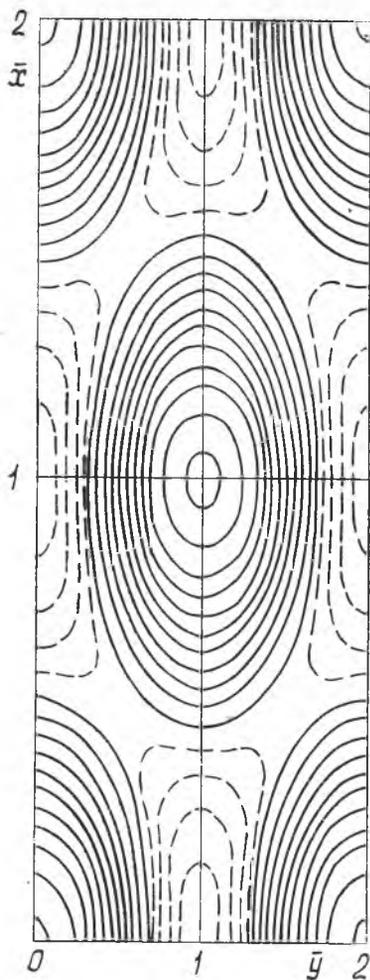
В решении Кемпнера с ростом параметра ξ величина $\bar{\sigma}$ интенсивно возрастает и асимптотически приближается к верхней критической нагрузке. В решениях с большим числом членов ряда (2) при сближении торцов оболочки нагрузка возрастает значительно медленнее.



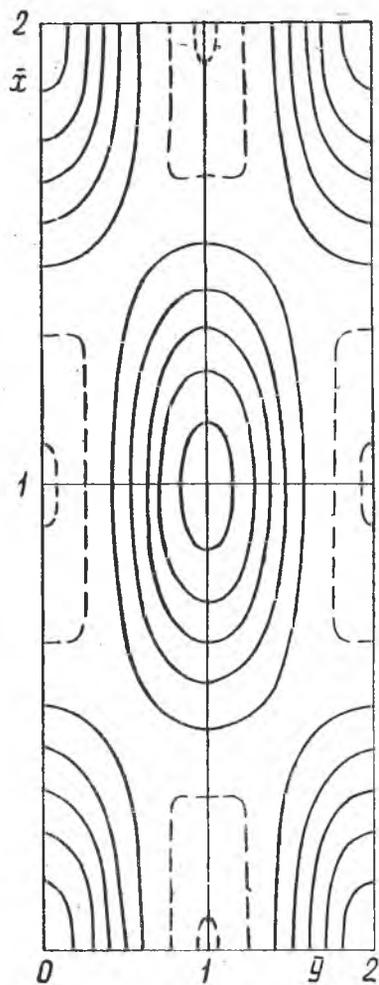
Фиг. 4.

На фиг. 5 изображены линии равного прогиба оболочки (с шагом $2t$) для нагрузки $\bar{\sigma}_{\min}$. Сплошные линии соответствуют вогнутым участкам, штриховые — выпученным. Аналогичные линии для решения Кемпнера приведены на фиг. 6.

На фиг. 7 приведены результаты расчета осевых мембранных напряжений $\bar{\sigma}_1^0$ (14) для поперечных сечений оболочки $\bar{x}=0, 2, 4...$ при нагрузке $\bar{\sigma}_{\min}$. Координаты $y=0$ и $y=2$ соответствуют впадинам изогнутой поверхности, а точки вблизи $y=1$ — выпученному участку оболочки. Напряжения во впадинах близки к нулю, на склонах вмятин действуют значительные сжимающие напряжения, а в зоне выпучивания имеет место резкий всплеск растягивающих напряжений. В решении Кемпнера при том же уровне сжимающих напряжений на склонах вмятин растягивающие напряжения в зоне выпучивания значительно ниже. Интересно отме-



Фиг. 5.

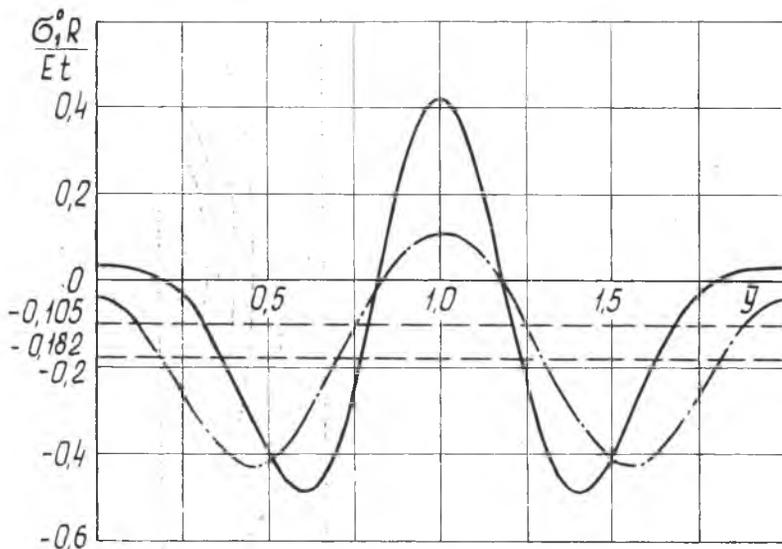


Фиг. 6.

тить, что в нашем варианте решения задачи оболочка в момент $\bar{\sigma}_{\min}$ выдерживает по склонам даже несколько большие сжимающие напряжения, чем по Кемпнеру, однако наличие зоны с большими растягивающими напряжениями ведет к резкому снижению среднего сжимающего напряжения, которое принимается за нижнюю критическую нагрузку.

Таким образом, мы наблюдаем, как введение новых членов в аппроксимирующее выражение для прогиба (2) не только дает

оболочке дополнительные степени свободы, но и определяет вид функции напряжений Φ , диктуя тем самым закон распределения напряжений по оболочке. Вопрос о справедливости этого закона и его практической реализации остается в стороне. Если сечение $\bar{x} = 0$ является торцовым, то осуществление эпюры нагружения фиг. 7 маловероятно. Если мы рассматриваем сечение $\bar{x} = 2$, то сле-



Фиг. 7.

дует изучить граничную зону $\bar{x} = 0-2$, где происходит перераспределение относительно равномерных сжимающих напряжений по торцу в резко неравномерное поле напряжений в зоне складкообразования.

Рассмотренная задача решается методом Ритца, который, строго говоря, требует удовлетворения геометрических граничных условий. Обычно цилиндрические оболочки опираются на шпангоуты, вследствие чего торцовые сечения $\bar{x} = 0$, t сохраняют свою начальную круговую форму. Принятая функция прогиба (9) не удовлетворяет этому условию, т. е. геометрические граничные условия не выполняются. Статические граничные условия, как уже отмечалось, выполняются лишь интегрально. Подобно тому, как в линейном варианте данной задачи учет граничных условий дал ряд новых результатов, так и в данном случае наложение граничных условий и изучение переходной зоны может дать многое.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. Karman, H. S. Tsien. The buckling of thin cylindrical shell under axial compression, IAS, v. 8 (section 3), N 8, 1941.
 2. H. F. Michielsen, The behavior of thin cylindrical shells after buckling under axial compression, IAS, v. 15, N. 12, 1948.
 3. J. Kempner, Postbuckling behavior of axially compressed shells, IAS, v. 21, N. 5, 1954. (Русский перевод в сборнике «Механика», вып. 2, 1955).
 4. А. С. Вольмир, Гибкие пластинки и оболочки, Гостехиздат, 1956.
 5. L. A. Harris, H. S. Suer, W. T. Skene, R. I. Bendjamine, The stability of thin-walled unstiffened circular cylinders under axial compression including the effect of internal pressure, IAS, v. 24, N.8, 1957.
 6. Б. М. Броуде. Практические методы расчета тонких оболочек на устойчивость, Исследования по стальным конструкциям, вып. 13. Госстройиздат, 1962.
 7. А. С. Вольмир. Устойчивость упругих систем, Физматгиз, 1963.
 8. Элмрос. Поведение после потери устойчивости круговых цилиндров при осевом сжатии, «Ракетная техника и космонавтика» (Русский перевод с «AIAA Journal»), № 3, 1963.
 9. Хофф, Мэдсен, Мейерс. Послекритическое равновесие круговых цилиндрических оболочек при осевом сжатии, «Ракетная техника и космонавтика» (Русский перевод с «AIAA Journal»), № 1, 1966.
-