Д. Н. НЕЗВАНОВ

# О ВЫБОРЕ ПОВЕРХНОСТИ ОТСЧЕТА ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЖЕСТКОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КОНСТРУКТИВНО-ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

В задачах устойчивости и прочности конструктивно-ортотропных цилиндрических оболочек при вычислении жесткостных характеристик возникает вопрос о выборе базовой поверхности для отсчета координат элементов подкрепления. Чаще всего за поверхность отсчета принимают поверхность, проходящую через центр жесткости подкрепленного сечения. Однако в общем случае осевые и кольцевые подкрепления цилиндрической оболочки различны и поверхности, проходящие через центры жесткости продольного и поперечного сечений, не совпадают между собой.

На примере нелинейной задачи о закритических упругих деформациях конструктивно-ортотропной цилиндрической оболочки покажем, что при определении жесткостных характеристик оболочки можно принимать произвольное расположение поверхности отсчета.

1. Пусть имеется конструктивно-ортотропная круговая цилиндрическая оболочка, нагруженная осевыми сжимающими усилиями $N$ и внутренним давлением $p$.

Будем полагать оболочку многослойной (с недеформируемой нормалью), состоящей из бесконечного множества ортотропных слоев. Жесткости слоев считаются известными. Такой подход применялся в работе [2] при исследовании устойчивости цилиндрических оболочек вафельного типа.

Приведем основные соотношения задачи.

Физические соотношения с учетом взаимодействия тангенциальных и изгибных деформаций запишем в следующем виде [1]:

$$\begin{vmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ 2M_{xy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & K_{11} & K_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & K_{21} & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} & 0 & 0 & K_{33} \\ K_{11} & K_{21} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ K_{12} & K_{22} & 0 & D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} & 0 & 0 & D_{33} \end{vmatrix} \begin{Vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma \\ \varkappa_x \\ \varkappa_y \\ \varkappa \end{Vmatrix}. \qquad (1)$$

Входящие в (1) жесткости оболочки $B_{ij}$, $K_{ij}$ и $D_{ij}$ выражаются через жесткости слоев $B^s_{ij}$ и $D^s_{ij}$ по формулам

$$B_{ij} = \sum_s B^s_{ij};$$

$$K_{ij} = \sum_s B^s_{ij} h_s; \quad K_{33} = \sum_s 2B^s_{33} h_s; \tag{2}$$

$$D_{ij} = \sum_s (D^s_{ij} + B^s_{ij} h_s^2); \quad D_{33} = \sum_s (D^s_{33} + 4B_{33} h_s^2),$$

где $h_s$ — расстояние по нормали от выбранной поверхности отсчета до отдельного слоя.

Уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \, \partial y} = -\frac{1}{2} L(w, w) - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

после подстановки (1) и введения функции усилий $\Phi$ примет вид

$$A_{22} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2\left(A_{12} + \frac{A_{33}}{2}\right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \, \partial y^2} + A_{11} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = -K'_{21} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} -$$

$$-(K'_{11} + K'_{22} - K'_{33}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \, \partial y^2} - K'_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{1}{2} L(w, w) - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{3}$$

Здесь

$$A_{11} = \frac{B_{22}}{B_0}; \quad A_{12} = A_{21} = -\frac{B_{12}}{B_0}; \quad A_{22} = \frac{B_{11}}{B_0}; \quad A_{33} = \frac{1}{B_{33}};$$

$$B_0 = B_{11} B_{22} - B_{12}^2; \quad K'_{ij} = \sum_{k=1}^{3} A_{ik} K_{kj}; \tag{4}$$

$$L(w, w) = 2\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y}\right)^2\right].$$

Потенциальная энергия деформации оболочки

$$U = \frac{1}{2} \iint_{x\,y} (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \gamma + M_x \varkappa_x + M_y \varkappa_y + 2M_{xy} \chi) \, dx \, dy$$

с учетом (1) будет равна

$$U = \frac{1}{2} \iint_{x\,y} \left[A_{11} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + A_{22} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)^2 + A_{33} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \, \partial y}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + D'_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2D'_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D'_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + D'_{33} \left(\frac{\partial^2 w}{d x \, d y}\right)^2\right] dx \, dy, \tag{5}$$

где

$$D'_{ij} = D_{ij} - \sum_{l=1}^{3} K_{ik} K'_{kj}. \tag{6}$$

Для работы внешних осевых сил $W_N$ и работы внутреннего давления $W_p$ получим следующие выражения:

$$W_N = \int_y \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right)_{x=0} \int_x \left[A_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + A_{12} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + K'_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + K'_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \right.$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\Bigg]\,dx\,dy,$$

$$W_p = -\int\limits_x\int\limits_y pw\,dx\,dy.$$

Полная энергия системы запишется в виде суммы

$$Э = U - W_N - W_p.$$

2. Рассмотрим задачу об отыскании закритических равновес ных форм конструктивно-ортотропной цилиндрической оболочк при осевых и поперечных нагрузках. Применяя метод Ритца, запи шем аппроксимирующее выражение для функции прогиба $w$ в вид усеченного ряда

$$w = \frac{R}{n^2}\sum_{q=0}^{q_п}\sum_{k=0}^{k_п}\alpha_{qk}\cos\frac{qrx}{R}\cos\frac{kny}{R},\quad q+k = 0, 2, 4, 6..,$$

где $r = \frac{m\pi R}{l}$,

$m$ — число полуволн по образующей,

$n$ — число полных волн по окружности

$l$ — длина оболочки,

$\alpha_{qk}$ — безразмерные амплитуды прогиба,

$q_п$ и $k_п$ — принятые предельные значения $q$ и $k$.

Подставив (10) в уравнение совместности деформаций (3), полу чим выражение для функции усилий

$$\Phi = -\frac{Ny^2}{2} + \frac{N_p x^2}{2} - 12(1-\mu^2)\frac{D'_{22}}{\vartheta^2\cdot\eta^2}\sqrt{\frac{A_{22}}{A_{11}}}\sum_{i=0}^{i_п}\sum_{j=0}^{j_п}C_{ij}G_{ij}\cos\frac{irx}{R}\cos\frac{jn}{R}$$

$$i + j = 2,\ 4,\ 6,\ 8...$$

Здесь

$$C_{ij} = \frac{\vartheta^4}{(i\vartheta)^4 + 2\gamma_1(i\vartheta)^2 j^2 + j^4};\quad \gamma_1 = \frac{A_{12}+\frac{A_{33}}{2}}{\sqrt{A_{11}A_{22}}},$$

$N_p = pR$ — кольцевые усилия в оболочке;

$i_п$ $j_п$ — максимальное значение $i$ и $j$, соответствующие количе ству удержанных членов ряда (10);

$G_{ij}$ — коэффициенты [2], зависящие от $\alpha_{qk}$, а также от вели чин

$$\vartheta = \frac{r}{n}\sqrt[4]{\frac{A_{22}}{A_{11}}};\quad \eta = \frac{n^2 A_0}{R};\quad A_0 = \sqrt{12(1-\mu^2)A_{22}D'_{22}};$$

$$\gamma_2 = \frac{K'_{21}}{A_0}\sqrt{\frac{A_{11}}{A_{22}}};\quad \gamma_3 = \frac{K'_{11}+K'_{22}-K'_{33}}{A_0};\quad \gamma_4 = \frac{K'_{12}}{A_0}\sqrt{\frac{A_{22}}{A_{11}}}.$$

По формулам (5), (7), (8) и (9) может быть вычислен безразмерный параметр полной энергии системы

$$\overline{Э} = \frac{ЭR}{12(1-\mu^2)\pi l D'_{22}} = -\overline{N}^2 - \overline{N}_p^2 + 2\nu_7 \overline{N}\,\overline{N}_p + \frac{1}{\eta^2}\sum_{i=0}^{i_п}\sum_{j=0}^{j_п}\frac{C_{ij}G_{ij}^2}{2(1+\xi)} +$$

$$+\frac{\vartheta^4}{12(1-\mu^2)}\sum_{q=0}^{q_п}\sum_{k=0}^{k_п}\frac{\alpha_{qk}^2}{C'_{qk}\,2(1+\xi)} - \overline{N}\frac{\vartheta^2}{\eta}\sum_{q=0}^{q_п}\sum_{k=0}^{k_п}\frac{q^2\alpha_{qk}^2}{2(1+\xi)} +$$

$$+\frac{\overline{N}_p}{\eta}\sum_{q=0}^{q_п}\sum_{k=0}^{k_п}\frac{k^2\alpha_{qk}^2}{2(1+\xi)}, \tag{14}$$

где $\xi = 0$ при $qk = 0$, $\xi = 1$ при $qk \neq 0$,

$$\overline{N} = NR\sqrt{\frac{A_{11}}{12(1-\mu^2)D'_{22}}};\quad \overline{N}_p = N_pR\sqrt{\frac{A_{22}}{12(1-\mu^2)D'_{22}}};$$

$$C'_{qk} = \frac{\vartheta^4}{\nu_6(q\vartheta)^4 + 2\nu_5\sqrt{\nu_6}(q\vartheta)^2k^2 + k^4}; \tag{15}$$

$$\nu_5 = \frac{D'_{12} + \frac{D'_{33}}{2}}{\sqrt{D'_{11}D'_{22}}};\quad \nu_6 = \frac{A_{11}D'_{11}}{A_{22}D'_{22}};\quad \nu_7 = \frac{A_{12}}{\sqrt{A_{11}A_{22}}}.$$

Условие минимума энергии приводит к соотношениям

$$\frac{\partial\overline{Э}}{\partial\alpha_{qk}} = \frac{\partial\overline{Э}}{\partial\eta} = \frac{\partial\overline{Э}}{\partial\vartheta} = 0. \tag{16}$$

Решение системы (16) при заданных величинах $N$ и $N_p$ дает значения параметров волнообразования $\alpha_{qk}$, $\eta$ и $\nu$, описывающих закритическое поведение оболочки.

3. Согласно полученным выше выражениям, решение данной задачи целиком определяется видом параметра энергии $Э$, который в свою очередь зависит от семи жесткостных коэффициентов $\nu_1$, $\nu_2$, $\nu_3$, $\nu_4$, $\nu_5$, $\nu_6$, $\nu_7$, характеризующих ортотропные свойства оболочки.

Рассмотрим, как изменятся численные значения $\nu_i$, если при вычислении жесткостей сместить базовую поверхность отсчета по нормали на расстояние $e$. Заменяя в выражениях (2), (4) и (6) координаты $h_s$ на $h_s - e$ и обозначая звездочкой величины, соответствующие новому положению поверхности отсчета, получим

$$B^*_{ij} = B_{ij};\quad A^*_{ij} = A_{ij};\quad A^*_0 = A_0;$$

$$K^*_{ij} = K_{ij} - eB_{ij};\quad K^*_{33} = K_{33} - 2eB_{33}; \tag{17}$$

$$D^*_{ij} = D_{ij} + e^2B_{ij} - 2eK_{ij};\quad D^*_{33} = D_{33} + 4e^2B_{33} - 4eK_{33};$$

$$K'^*_{11} = K'_{11} - e;\quad K'^*_{12} = K'_{12};\quad K'^*_{21} = K'_{21};\quad K'^*_{22} = K'_{22} - e;\quad K'^*_{33} = K'_{33} - 2e;$$

$$D'^*_{ij} = D'_{ij}.$$

Подстановка (17) в выражения для $\nu_i$, показывает, что

$$\nu_i^* = \nu_i. \quad (18)$$

Из соотношений (17) следует, что при смещении поверхности отсчета некоторые жесткости оболочки остаются постоянными ($A_{ij}$, $B_{ij}$, $D_{ij}$), другие же существенно изменяются ($K_i^j$, $D_{ij}$, $K_{ij}$). Однако в выражение для параметра энергии системы (14) и в разрешающие уравнения задачи (16) входят не сами величины жесткостей, а определяемые с их помощью жесткостные коэффициенты $\nu_i$. Согласно (18) коэффициенты $\nu_i$ являются инвариантными к выбору системы отсчета.

Отметим, что входящие в (14) параметры $N$, $N_p$, $\eta$ и $\nu$ содержат жесткости $A_{ij}$ и $D'_{ij}$, также не меняющиеся при переносе поверхности отсчета.

Таким образом, при переходе к новой поверхности отсчета система уравнений (16) при заданных $N$ и $N_p$ даст прежние значения искомых параметров $\alpha_{qk}$, $\eta$ и $\nu$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. B. Geier. Das Beulverhalten versteifter zylinderschalen. Zeitschrift für Flugwissenschaften, 14, № 7, 1966.

2. Незванов Д. Н. Устойчивость цилиндрических оболочек вафельного типа при осевом сжатии. Труды КуАИ, вып. 48, Куйбышев, 1971.