Л. И. ФРИДМАН

О РАЗРЕШАЮЩИХ УРАВНЕНИЯХ ДЛЯ БАЛКИ С. П. ТИМОШЕНКО

1. Колебания стержня с учетом инерции вращения и сдвига (балка С. П. Тимошенко) описываются системой уравнений [1, 4]

$$a_{11}\,u + a_{12}\,\vartheta = -\frac{kl}{EA}\,q, \quad a_{21}\,u + a_{22}\,\vartheta = 0. \tag{1}$$

Здесь u — безразмерный прогиб стержня, отнесенный к его длине l; ϑ — угол наклона касательной к изогнутой оси в предположении, что сдвиг не учитывается; a_{ij} — дифференциальные операторы

$$a_{11} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}; \quad a_{12} = -\frac{\partial}{\partial x};$$

$$a_{21} = \frac{\mu^2}{k}\,\frac{\partial}{\partial x}; \quad a_{22} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\mu^2}{k}, \tag{2}$$

q — распределенная нагрузка; x — безразмерная координата точки оси стержня, отнесенная к его длине l; t — безразмерное время, отнесенное ко времени $\frac{l}{c}$ прохождения возмущения вдоль оси стержня; $c = \sqrt{\frac{Eg}{\rho}}$ — скорость распространения возмущений в материале стержня; E — модуль упругости; g — ускорение силы тяжести; γ — удельный вес; κ — коэффициент, зависящий от формы сечения и коэффициента Пуассона [1]; $\mu = \frac{l}{R}$ — гибкость стержня; $R\sqrt{\frac{I}{A}}$ — радиус инерции стержня; I — момент инерции сечения; A — площадь сечения.

Введем функции $F(x, t)$ и $\Phi(x, t)$, связанные с u и ϑ зависимостями

$$u = a_{22}\,F - a_{12}\,\Phi; \quad \vartheta = -a_{21}\,F + a_{11}\,\Phi. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1), получим

$$DF = -\frac{kl}{EA}\,q. \tag{4}$$

$$D\Phi = 0 \tag{5}$$

Здесь D — определитель, элементами которого являются операторы (2):

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \frac{\partial^4}{\partial x^4} - (k+1)\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + k\frac{\partial^4}{\partial t^4} + \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \tag{6}$$

Пусть

$$F = \Phi_0 + \Phi_*, \tag{7}$$

где Φ_0 — решение однородного уравнения

$$D\Phi_0 = 0, \tag{8}$$

а Φ_* — частное решение уравнения (4).

Положим

$$\Phi_0 = 0. \tag{9}$$

Тогда вместо (3) будем иметь:

$$u = a_{22} F; \quad \vartheta = -a_{21} F. \tag{10}$$

Таким образом, система (1) заменяется одним уравнением (4) с одной неизвестной функцией F.

Из системы (1) можно также получить уравнения

$$Du = \begin{vmatrix} -\frac{kl}{AE} q & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = \frac{l^3}{EI} q + \frac{kl}{EA}\left(\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\right), \tag{11}$$

$$D\vartheta = \begin{vmatrix} a_{11} & -\frac{kl}{EA} q \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} = \frac{l^3}{EI}\frac{\partial q}{\partial x}. \tag{12}$$

Каждое из уравнений (11), (12) формально эквивалентно системе (1), причем уравнение (11) применяется при решении некоторых однородных задач о колебаниях стержня с учетом инерции вращения и сдвига [2, 3]. При замене системы (1) уравнением (11) или (12) следует учитывать граничные и начальные условия для обеих искомых функций u и ϑ, что не всегда возможно [4]. Уравнение (4) предпочтительнее уравнений (11) и (12), так как его решение дает сразу обе искомые функции u и ϑ.

2. Рассмотрим вынужденные колебания шарнирно опертого стержня под действием распределенной нагрузки $q(x, t)$. Граничные условия для шарнирно опертого стержня записываются в таком виде:

$$\text{при } x = 0 \text{ и } x = 1 \quad u = 0; \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0. \tag{13}$$

Полагая $q(x, 0) = 0$, получим начальные условия задачи

$$\text{при } t = 0 \quad u = 0, \quad \vartheta = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0. \tag{14}$$

Граничные условия (13) будут удовлетворены, если решение уравнения (4) искать в виде ряда

$$F = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cdot \sin m\pi x. \tag{15}$$

Здесь φ_m — функция времени.

Подставляя (15) в (4) и полагая

$$q(x, t) = f(t) \cdot q_0(x); \tag{16}$$

$$q_0(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cdot \sin m\pi x; \quad a_m = 2\int_0^1 q_0(x) \cdot \sin m\pi x \cdot dx,$$

получим

$$\frac{d^4 \varphi_m}{dt^4} + \frac{1}{k}\left[(k+1)(m\pi)^2 + \mu^2\right]\frac{d^2 \varphi_m}{dt^2} + \frac{(m\pi)^4}{k}\varphi_m = -\frac{l}{EA} a_m \cdot f(t). \tag{17}$$

Начальные условия для функции φ_m получаются из (14) после подстановки (15) в (10):

$$\text{при } t = 0 \quad \varphi_m = 0; \quad \frac{d\varphi_m}{dt} = 0, \quad \frac{d^2 \varphi_m}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^3 \varphi_m}{dt^3} = 0. \tag{18}$$

Решение уравнения (17) при условиях (18) может быть найдено методом Коши и записано в виде

$$\varphi_m = -\frac{l}{EA} a_m \left[\frac{1}{(\lambda_{2m}^2 - \lambda_{1m}^2)\lambda_{1m}} \int_0^t f(\Theta) \cdot \sin \lambda_{1m}(t - \Theta)\, d\Theta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(\lambda_{1m}^2 - \lambda_{2m}^2)\lambda_{2m}} \int_0^t f(\Theta) \cdot \sin \lambda_{2m}(t - \Theta)\, d\Theta\right]. \tag{19}$$

Здесь Θ — параметр, λ_{1m} и λ_{2m} — частоты свободных колебаний шарнирно опертого стержня, определяемые уравнением [1]

$$\lambda_m^4 - \frac{1}{k}\left[(k+1)(m\pi)^2 + \mu^2\right]\lambda_m^2 + \frac{(m\pi)^4}{k} = 0 \tag{20}$$

(последнее может быть получено из (8), если принять

$$\Phi_0 = \sum_{m=1}^{\infty} T_m \sin m\pi x \text{ и } \frac{1}{T_m}\frac{d^2 T_m}{dt^2} = -\lambda_m^2).$$

Перемещения u и углы поворота ϑ получим из (10):

$$u = \frac{l}{EA}\sum_{m=1}^{\infty} a_m \left\{\frac{\left[(m\pi)^2 - \lambda_{1m}^2 \frac{\mu^2}{k}\right]}{(\lambda_{2m}^2 - \lambda_{1m}^2)\lambda_{1m}} \int_0^t f(\Theta) \cdot \sin \lambda_{1m}(t - \Theta)\, d\Theta + \right.$$

$$\left. + \frac{\left[(m\pi)^2 - \lambda_{2m}^2 + \frac{\mu^2}{k}\right]}{(\lambda_{1m}^2 - \lambda_{2m}^2)\lambda_{2m}} \int_0^t f(\Theta) \cdot \sin \lambda_{2m}(t - \Theta)\, d\Theta\right\} \sin m\pi x, \tag{21}$$

$$\vartheta = \frac{l^3}{kEI} \sum_{m=1}^{\infty} a_m (m\pi) \left[\frac{1}{\left(\lambda_{2m}^2 - \lambda_{1m}^2\right) \lambda_{1m}} \int_0^t f(\Theta) \cdot \sin \lambda_{1m} (t - \Theta)\, d\Theta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\left(\lambda_{1m}^2 - \lambda_{2m}^2\right) \lambda_{2m}} \int_0^t f(\Theta) \cdot \sin \lambda_{2m} (t - \Theta)\, d\Theta \right] \cos m\pi x. \qquad (22)$$

Заметим, что применение, например, уравнения (11) для решения поставленной задачи приводит к значительным трудностям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пономарев С. Д., Бидерман В. М. и др. Расчеты на прочность в машиностроении, том III, Машгиз, М., 1959.
2. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. Физматгиз, М., 1959.
3. Уфлянд Я. С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин. ПММ, том. XII, 1948.
4. Флексер М. Ш. Об учете влияния инерции вращения и перерезывающих сил на поперечные колебания стержня конечной длины. Инженерный сборник, том. XXIII изд. АН СССР, М., 1956.