ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
Межвузовский сборник, вып. 2, 1975

А.С.Авдонин

О ПРИМЕНЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ К ПРОЕКТИРОВАНИЮ КОНСТРУКЦИЙ МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА

Покажем применение геометрических неравенств к проектированию конструкций минимального веса. В качестве примера рассмотрим подкрепленную шпангоутами цилиндрическую оболочку, нагруженную наружным равномерным давлением. В этом случае задача сводится к определению минимума веса подкрепленной шпангоутами цилиндрической оболочки

$$G = 2\pi RL\delta\gamma + 2\pi RF\frac{L}{a}\gamma \tag{I}$$

при наличии ограничений

$$q_p \le q^{м}_{кр}, \quad q_p \le q^{o}_{кр}. \tag{2}$$

Здесь

$q^{м}_{кр} = 0{,}92\cdot E\,\dfrac{\delta^2}{Ra}\sqrt{\dfrac{\delta}{R}}$ – величина критического наружного давления для оболочки между шпангоутами [I];

$q^{o}_{кр} = 0{,}92\cdot E\,\dfrac{\delta^2}{RL}\sqrt{D_o\dfrac{\delta}{R}\sqrt{D_o}}$ – величина критического наружного давления всей оболочки в целом [I];

$$D_o = 1 + \frac{12(1-\mu^2)J}{a\delta^3} \approx \frac{12(1-\mu^2)J}{a\delta^3};$$

L, R, δ – длина, радиус и толщина стенки оболочки;

F, J – площадь и момент инерции поперечного сечения шпангоута относительно оси, параллельной образующей оболочки;

a – расстояние между шпангоутами;

$q_p = q_э f$ – величина расчетного давления;

$q_э$, f – величина эксплуатационного давления и коэффициент безопасности;

γ – удельный вес материала.

Введем обозначения:

$$t_1=\frac{\delta}{R},\quad t_2=\frac{F}{R^2},\quad t_3=\frac{a}{R},\quad q_0=\frac{G}{2\pi R^2 L\gamma},\quad c_1=1,\quad c_2=1,$$

$$c_3=\frac{q_p}{0{,}92E},\quad c_4=\frac{q_p L}{0{,}92ER(\alpha K)^{3/4}},\quad \alpha=\frac{J}{F^2},\quad K=12(1-\mu^2).$$

Тогда (I) и (2) примут вид

$$q_0(t)=c_1t_1+c_2t_2t_3^{-1},$$

$$c_3t_1^{-\frac{5}{2}}t_3\le 1, \tag{3}$$

$$c_4t_1^{-\frac{1}{4}}t_2^{-\frac{3}{2}}t_3^{\frac{3}{4}}\le 1.$$

Обозначим здесь

$$u_1=c_1t_1,\quad u_2=c_2t_2t_3^{-1},\quad u_3=c_3t_1^{-\frac{5}{2}}t_3,\quad u_4=c_4t_1^{-\frac{1}{4}}t_2^{-\frac{3}{2}}t_3^{\frac{3}{4}}. \tag{4}$$

Тогда

$$q_0=u_1+u_2 \tag{5}$$

$$u_3\le 1$$

$$u_4\le 1. \tag{6}$$

Для определения минимума функции (5) при наличии ограничений (6), в общем случае имеющих нелинейную структуру относительно искомых параметров t_i, воспользуемся следующим геометрическим неравенством, доказательство которого можно найти в [2]

$$\left(\frac{u_1}{\Delta_1}\right)^{\Delta_1}\left(\frac{u_2}{\Delta_2}\right)^{\Delta_2}\ldots\left(\frac{u_n}{\Delta_n}\right)^{\Delta_n}\lambda^{\lambda}\le[q(t)]^{\lambda}. \tag{7}$$

Здесь

Δ_i – весовые коэффициенты, подлежащие определению в дальнейшем; они должны удовлетворять условию $\Delta_i\geqslant 0$;

$$\lambda=\Delta_1+\Delta_2+\ldots+\Delta_n.$$

Неравенство (7) носит весьма общий характер, и оно применимо как к оптимизируемой функции (5), так и к любой функции $q(t)$, входящей в состав ограничений (6). Эти функции в общем виде можно записать следующим образом:

$$q_0(t)=\sum_{i=1}^{n}u_i, \tag{8}$$

где $u_i = c_1 t_1^{a_{i1}} t_2^{a_{i2}} \dots t_n^{a_{in}}$, (9)

при ограничениях

$$\begin{aligned} &q_1(t) \le 1, \\ &q_2(t) \le 1, \\ &\dots\dots\dots \\ &q_r(t) \le 1. \end{aligned} \tag{10}$$

Функции-ограничения (10) имеют вид

$$q_r(t) = \sum_{k=1}^{r} u'_k , \tag{11}$$

где

$$u'_k = c'_k t_1^{a'_{k1}} t_2^{a'_{k2}} \dots t_r^{a'_{kr}} . \tag{12}$$

Из сравнения структуры функций u_i и u'_k видно, что они идентичны.

В приведенных выражениях обозначено:

c_i, c'_k - вещественные положительные числа (коэффициенты в (3)); t_1, t_2, ... - независимые положительные переменные, подлежащие определению из условия минимума функции $q_o(t)$; a_{ij}, a'_{kj} - произвольные положительные числа.

В работе [2] доказано, что минимум функции $q(t)$ в точности равен максимуму функции, стоящей в левой части неравенства (7), причем этот максимум будет единственным.

Применим неравенство (7) к (8):

$$\left(\frac{u_1}{\Delta_1}\right)^{\Delta_1} \left(\frac{u_2}{\Delta_2}\right)^{\Delta_2} \dots \left(\frac{u_n}{\Delta_n}\right)^{\Delta_n} \lambda_o^{\lambda_o} \le [q_o(t)]^{\lambda_o} . \tag{13}$$

По доказанному в [2] здесь следует положить

$$\lambda_o = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n = 1 . \tag{14}$$

Тогда

$$\left(\frac{u_1}{\Delta_1}\right)^{\Delta_1} \left(\frac{u_2}{\Delta_2}\right)^{\Delta_2} \dots \left(\frac{u_n}{\Delta_n}\right)^{\Delta_n} \le q_o(t). \tag{15}$$

Если применить неравенство (7) к функциям, входящим в состав ограничений (10), то получим

$$\left(\frac{u'_1}{\Delta'_1}\right)^{\Delta'_1} \left(\frac{u'_2}{\Delta'_2}\right)^{\Delta'_2} \dots \left(\frac{u'_r}{\Delta'_r}\right)^{\Delta'_r} (\lambda'_r)^{\lambda'_r} \le 1 . \tag{16}$$

Здесь

$$\lambda' = \Delta'_1 + \Delta'_2 + \dots + \Delta'_r .$$

Общее количество неравенств типа (16) будет равно числу ограничений (10).

В неравенство (15) и во все неравенства типа (16) надо подставить соответствующие выражения для u_i и u'_k по (9) и (12). Затем полученные неравенства почленно перемножить. При этом будет получено

$$V(\Delta,t)=\left(\frac{c_1}{\Delta_1}\right)^{\Delta_1}\left(\frac{c_2}{\Delta_2}\right)^{\Delta_2}\ldots\left(\frac{c_n}{\Delta_n}\right)^{\Delta_n}\prod_{z=1}^{z}\left(\frac{c'_z}{\Delta'_z}\right)^{\Delta'_z}(\lambda'_z)^{\lambda'_z}t_1^{\Sigma a_{ij}\Delta_i}t_2^{\Sigma a_{ij}\Delta_i}\leq q_0(t). \quad (17)$$

Здесь группа сомножителей, стоящих перед знаком произведения $\prod$, состоит из коэффициентов, входящих в (9). Буквой $\prod$ условно обозначено произведение, состоящее из коэффициентов, входящих в состав функций-ограничений на соответствующие суммы весовых коэффициентов λ'_z. Остальные сомножители относятся к искомым переменным t_i.

Функцию V в левой части (17) называют преддвойственной. Как видно из (17), она зависит как от Δ_i, так и от t_i. Если в (17) положить все показатели степеней у t_i равными нулю

$$\begin{aligned}&\Sigma a_{ij}\,\Delta_i = 0,\\ &-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;- \qquad\qquad\qquad (18)\\ &-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;,\end{aligned}$$

то функция V будет называться двойственной и зависеть только от Δ_i:

$$V(\Delta)=\left(\frac{c_1}{\Delta_1}\right)^{\Delta_1}\left(\frac{c_2}{\Delta_2}\right)^{\Delta_2}\ldots\left(\frac{c_n}{\Delta_n}\right)^{\Delta_n}\prod_{z=1}^{z}\left(\frac{c'_z}{\Delta'_z}\right)^{\Delta'_z}(\lambda'_z)^{\lambda'_z}\leq q_0(t). \quad (19)$$

Условие (14) и система уравнений (18) служат для определения весовых коэффициентов Δ_i. Здесь могут встретиться два случая: число искомых Δ_i равно числу уравнений (14) и (18); и второй случай, когда количество коэффициентов Δ_i больше числа этих уравнений. В этом случае недостающие уравнения получаются из условия обращения двойственной функции $V(\Delta)$ в максимум. Для этой цели надо составить частные производные от этой функции по оставшимся неизвестным и приравнять их нулю. В результате этого общее число уравнений будет равно числу весовых коэффициентов Δ_i. После определения из этих уравнений значений Δ_i и подстановки их в (19) получим

$$V(\Delta)_{max} = q_0(t)_{min}. \quad (20)$$

В работе [2] показано, что для определения искомых параметров имеют место следующие формулы:

$$\Delta_1 = \frac{u_1(t)}{V_{max}}, \quad \Delta_2 = \frac{u_2(t)}{V_{max}}, \ldots, \Delta_n = \frac{u_n(t)}{V_{max}}, \tag{21}$$

$$\Delta_1' = \lambda_1' u_1'(t), \quad \Delta_2' = \lambda_1' u_2(t), \ldots, \Delta_n' = \lambda_1' u_n'(t). \tag{22}$$

Формулы (21) и (22) служат для определения искомых параметров t_i , которые обращают функцию $q_0(t)$ в минимум. При решении этих уравнений предварительно их надо прологарифмировать, что позволит свести решение системы нелинейных уравнений к линейной системе.

Теперь вернемся к определению минимума функции (5) при наличии ограничений (6). В соответствии с изложенной выше процедурой составим неравенства по (13):

$$\left(\frac{u_1}{\Delta_1}\right)^{\Delta_1}\left(\frac{u_2}{\Delta_2}\right)^{\Delta_2}(\Delta_1+\Delta_2)^{(\Delta_1+\Delta_2)} \leq [q_0(t)]^{(\Delta_1+\Delta_2)},$$

$$\left(\frac{u_3}{\Delta_3}\right)^{\Delta_3}\Delta_3^{\Delta_3} \leq 1,$$

$$\left(\frac{u_4}{\Delta_4}\right)^{\Delta_4}\Delta_4^{\Delta_4} \leq 1.$$

Положим здесь

$$\lambda_0 = \Delta_1 + \Delta_2 = 1 \tag{23}$$

и перемножим полученные неравенства

$$V(\Delta,t) = \left(\frac{u_1}{\Delta_1}\right)^{\Delta_1}\left(\frac{u_2}{\Delta_2}\right)^{\Delta_2}\left(\frac{u_3}{\Delta_3}\right)^{\Delta_3}\left(\frac{u_4}{\Delta_4}\right)^{\Delta_4}\Delta_3^{\Delta_3}\Delta_4^{\Delta_4} \leq q_0(t).$$

После подстановки сюда значений (4) получим

$$V(\Delta,t) = c_1^{\Delta_1} c_2^{\Delta_2} c_3^{\Delta_3} c_4^{\Delta_4} \Delta_1^{-\Delta_1}\Delta_2^{-\Delta_2} t_1^{\Delta_1-\frac{5}{2}\Delta_3-\frac{1}{4}\Delta_4} t_2^{\Delta_2-\frac{3}{4}\Delta_4} t_3^{-\Delta_2+\Delta_3+\frac{3}{4}\Delta_4} \leq q_0(t).$$

Приравнивая здесь нулю показатели степеней у t_i и учитывая (23), получим следующую систему уравнений для определения Δ_i :

$$\Delta_1 + \Delta_2 = 1,$$

$$\Delta_1 - \frac{5}{2}\Delta_3 - \frac{1}{4}\Delta_4 = 0,$$

$$\Delta_2 - \frac{3}{4}\Delta_4 = 0,$$

$$-\Delta_2 + \Delta_3 + \frac{3}{4}\Delta_4 = 0.$$

Из этих уравнений было найдено

$$\Delta_1 = \frac{17}{29}, \quad \Delta_2 = \frac{12}{29}, \quad \Delta_3 = \frac{6}{29}, \quad \Delta_4 = \frac{8}{29}.$$

После подстановки $\Delta_1, \ldots, \Delta_4$ в $V(\Delta)$ получим

$$V(\Delta)_{max} = C_1^{\Delta_1} C_2^{\Delta_2} C_3^{\Delta_3} C_4^{\Delta_4} \Delta_1^{-\Delta_1} \Delta_2^{-\Delta_2} = 1{,}26\alpha^{-\frac{6}{29}} q_p^{\frac{14}{29}} \left(\frac{L}{R}\right)^{\frac{8}{29}} = q_o(t)_{min}.$$

Для определения искомых параметров оболочки имеем уравнения

$$\Delta_1 = \frac{u_1}{V_{max}}, \quad \Delta_2 = \frac{u_2}{V_{max}}, \quad \Delta_3 = \Delta_3 u_3, \quad \Delta_4 = \Delta_4 u_4.$$

После подстановки сюда значений (4) были получены следующие значения искомых параметров конструкции подкрепленной цилиндрической оболочки:

$$t_1 = \frac{\delta}{R} = 0{,}73\alpha^{-\frac{6}{29}} q_p^{\frac{14}{29}} \left(\frac{L}{R}\right)^{\frac{8}{29}}$$

$$t_2 = \frac{F}{R^2} = 0{,}718\alpha^{-\frac{21}{29}} q_p^{\frac{20}{29}} \left(\frac{L}{R}\right)^{\frac{28}{29}}$$

$$t_3 = \frac{a}{R} = 0{,}425\alpha^{-\frac{15}{29}} q_p^{\frac{6}{29}} \left(\frac{L}{R}\right)^{\frac{28}{29}}$$

Величина α, входящая в эти выражения, приближенно определяется по сортаменту профилей, из которых будут изготавливаться шпангоуты.

Литература

1. Авдонин А.С. Прикладные методы расчета оболочек и тонкостенных конструкций. Машиностроение, 1969.
2. Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К. Геометрическое программирование. Изд. "Мир", 1972.