Л. И. ФРИДМАН

О НЕКОТОРЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ТРЕХМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ИХ РЕШЕНИЙ

1. Уравнения трехмерной динамической задачи теории упругости неравномерно нагретого тела в безразмерных прямоугольных координатах x_1, x_2, x_3, отнесенных к характерному линейному размеру l, записываются в виде [1]:

$$a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + a_{i3}u_3 = -\frac{l^2}{E}X_i + \frac{1}{1-2\nu}l\alpha\frac{\partial T}{\partial x_i}. \tag{1}$$

Здесь u_i $(i=1, 2, 3)$ — компоненты перемещения вдоль осей ox_i; X_i — компоненты объемной силы, заданные как функции координат и времени, E — модуль упругости: ν — коэффициент Пуассона; t — безразмерное время, равное $t=\tau\frac{\psi}{l}$; τ — время; $c=\frac{E}{\rho}$ — скорость звука в материале тела; ρ — массовая плотность; T — температура, заданная как функция координат и времени; α — коэффициент линейного расширения; a_{ij} $(i=1, 2, 3;\ j=1, 2, 3)$ — линейные дифференциальные операторы

$$a_{ij} = \frac{1}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j} + \delta_{ij}\left[\frac{1}{2(1+\nu)}\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right], \tag{2}$$

∇^2 — оператор Лапласа; δ_{ij} — символ Кронекера.

Введением функций Φ_1, Φ_2, Φ_3 координат и времени, связанных с компонентами перемещения соотношениями

$$u_i = A_{1i}\Phi_1 + A_{2i}\Phi_2 + A_{3i}\Phi_3 \quad (i = 1, 2, 3), \tag{3}$$

в которых

$$A_{ji} = \left\{-\frac{1}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j} + \delta_{ij}\left[\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\right\} \times$$
$$\times\left[\frac{1}{2(1+\nu)}\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3 \tag{4}$$

— миноры определителя D, элементами которого являются операторы a_{ij}, система (1) заменяется уравнением

$$DF = -\frac{l^2}{E}(X_1 + X_2 + X_3) + \frac{1}{1-2\nu} l\alpha \left(\frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{\partial T}{\partial x_2} + \frac{\partial T}{\partial x_3}\right), \qquad (5)$$

где $F = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$; Φ_0 — решение однородного уравнения

$$D\Phi_0 = 0, \qquad (6)$$

$\Phi_i\,(i = 1, 2, 3)$ — частные решения уравнений

$$D\Phi_i = -\frac{l^2}{E} X_i + \frac{1}{1-2\nu} l\alpha \frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

Оператор D имеет вид

$$D = \left[\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\left[\frac{1}{2(1+\nu)}\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]^2 =$$

$$= \frac{1-\nu}{4(1+\nu)^3(1-2\nu)}\nabla^2\nabla^2\nabla^2 - \frac{5-6\nu}{4(1+\nu)^2(1-2\nu)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2\nabla^2 +$$

$$+ \frac{2-3\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{\partial^4}{\partial t^4}\nabla^2 - \frac{\partial^6}{\partial t^6}. \qquad (7)$$

Перемещения (3) могут быть записаны в виде

$$u_i = u_{i0} + \sum_{k=1}^{3} u_{ik}; \quad u_{ik} = A_{ki}\,\Phi_k\,(i = 1, 2, 3;\ k = 1, 2, 3),$$

а перемещения u_{i0}, являющиеся решением однородной системы (1), определяются одним из соотношений

$$u_{i0} = A_{1i}\,\Phi_0; \quad u_{i0} = A_{2i}\,\Phi_0; \quad u_{i0} = A_{3i}\,\Phi_0;$$

$$u_{i0} = (A_{1i} + A_{2i})\,\Phi; \quad u_{i0} = (A_{1i} + A_{3i})\,\Phi_0; \quad u_{i0} = (A_{2i} + A_{3i})\,\Phi_0 \qquad (8)$$

$$u_{i0} = (A_{1i} + A_{2i} + A_{3i})\,\Phi_0. \quad (i = 1, 2, 3).$$

2. В случае однородной задачи уравнение (5) и соотношения (8) могут быть упрощены.

Обозначим

$$\frac{1}{2(1+\nu)}\nabla^2\Phi_0 - \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial t^2} = \Phi_* \qquad (9)$$

и введем оператор

$$B_{ij} = -\frac{1}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j} + \delta_{ij}\left[\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]. \qquad (10)$$

Тогда вместо (8) получим

$$u_{i0} = B_{1i}\,\Phi_*; \quad u_{i0} = B_{2i}\,\Phi_*; \quad u_{i0} = B_{3i}\,\Phi_*,$$

$$u_{i0} = (B_{1i} + B_{2i})\,\Phi_*; \quad u_{i0} = (B_{1i} + B_{3i})\,\Phi_*; \quad u_{i0} = (B_{2i} + B_{3i})\,\Phi_*,$$

$$u_{i0} = (B_{1i} + B_{2i} + B_{3i})\,\Phi_* \qquad (11)$$

и вместо (5)

$$\left[\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\left[\frac{1}{2(1+\nu)}\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\Phi_* = 0. \qquad (12)$$

Легко видеть, что функция Φ_* описывает для бесконечного тела известные волны расширения и волны искажения [3].

Пусть

$$\Phi_* = \varphi + \psi, \tag{13}$$

где

$$\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0; \tag{14}$$

$$\frac{1}{2(1+\nu)} \nabla^2\psi - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0. \tag{15}$$

Решая (14) и (15) методом Даламбера-Эйлера [2], получим

$$\varphi = \varphi_1(v_1) + \varphi_2(v_2), \tag{16}$$

$$\psi = \psi_1(w_1) + \psi_2(w_2). \tag{17}$$

Здесь

$$v_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \sqrt{\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}}\, t;$$

$$v_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 - \sqrt{\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}}\, t;$$

$$w_1 = \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2 + \beta_{13}x_3 + \frac{1}{\sqrt{2(1+\nu)}}\, t;$$

$$w_2 = \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 + \beta_{23}x_3 - \frac{1}{\sqrt{2(1+\nu)}}\, t.$$

α_{ki} и β_{ki} (к = 1, 2; i = 1, 2, 3) — произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям

$$\alpha_{k1}^2 + \alpha_{k2}^2 + \alpha_{k3}^2 = 1;$$

$$\beta_{k1}^2 + \beta_{k2}^2 + \beta_{k3}^2 = 1;$$

$\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ — произвольные функции.

Подставляя (16) и (17) в (11), получим перемещения. Для бесконечного пространства следует пользоваться последним выражением (11), для которого все направления равноправны.

Тогда

$$u_{i0}^{(1)} = -\frac{1}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\alpha_{1i}(\alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13})\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial v_1^2} + \alpha_{2i}(\alpha_{21}+\alpha_{22}+\alpha_{23})\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial v_2^2}\right] \tag{18}$$

$$u_{i0}^{(2)} = \frac{1}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{[1-\beta_{1i}(\beta_{11}+\beta_{12}+\beta_{13})]\frac{\partial^2\psi_1}{\partial w_1^2} + \right.$$

$$\left. + [1-\beta_{2i}(\beta_{21}+\beta_{22}+\beta_{23})]\frac{\partial^2\psi_2}{\partial w_2^2}\right\}. \tag{19}$$

Из (18) и (19) следует

$$\frac{\partial u_{i0}^{(1)}}{\partial x_j}-\frac{\partial u_{j0}^{(1)}}{\partial x_i}=0, \quad (i=1,2,3;\ j=1,2,3);$$

$$\frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial x_1}+\frac{\partial u_{20}^{(2)}}{\partial x_2}+\frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial x_3}=0,$$

т. е. $u_{i0}^{(1)}$ описывают деформацию без искажения формы, $u_{i0}^{(2)}$ — деформацию без изменения объема.

Переход в (18) и (19) к размерному времени и размерным координатам позволяет трактовать перемещения $u_{i0}^{(1)}$ как волны расширения со скоростью $c_1=c\sqrt{\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}}$, а перемещения $u_{i0}^{(2)}$ как волны искажения со скоростью $c_2=c\,\frac{1}{\sqrt{2(1+\nu)}}$. Направление распространения волн определяется прямыми с направляющими косинусами α_{ki} и β_{ki}.

3. Функция Φ_k описывает также поверхностные волны Релея. Рассмотрим полупространство, ограниченное плоскостью $x_1=0$ (Ось ox_1 направим внутрь тела). Функцию Φ_* будем искать в виде

$$\Phi_*=\Phi_{*1}(x_1)\cdot e^{im(x_3-at)}. \tag{20}$$

Здесь a — безразмерная скорость распространения волны вдоль оси ox_3; m — некоторая постоянная. Подставляя (20) в (12), получим дифференциальное уравнение относительно Φ_{*1}, решение которого дает

$$\Phi_{*1}=C_1e^{-\gamma_0x_1}+C_2e^{\gamma_0x_1}+C_3e^{-\gamma_*x_1}+C_4e^{\gamma_*x_1}. \tag{21}$$

Здесь

$$\gamma_0=m\sqrt{1-\alpha_1^2};\quad \gamma_*=m\sqrt{1-\alpha_2^2},$$

$$\alpha_1^2=a^2\cdot 2(1+\nu);\quad \alpha_2^2=a^2\,\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}.$$

Перемещения u_{i0} определим по первой зависимости (11):

$$u_{10}=B_{11}\Phi_*;\quad u_{20}=B_{12}\Phi_*=0;\quad u_{30}=B_{13}\Phi_*. \tag{22}$$

Из условия $u_{10}\to 0$ и $u_{30}\to 0$ при $x_1\to\infty$ получим

$$C_2=C_4=0.$$

Перемещениям (22) соответствуют напряжения

$$\sigma_{11}=\frac{E}{2(1+\nu)l}\left[2\frac{\partial u_{10}}{\partial x_1}+\frac{2\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u_{10}}{\partial x_1}+\frac{\partial u_{20}}{\partial x_2}\right)\right];$$

$$\sigma_{13}=\frac{E}{2(1+\nu)l}\left(\frac{\partial u_{10}}{\partial x_3}+\frac{\partial u_{20}}{\partial x_1}\right). \tag{23}$$

На граничной плоскости $x_1=0$

$$\sigma_{11}=0;\quad \sigma_{13}=0. \tag{24}$$

условия (24) дают систему однородных уравнений относительно постоянных C_1 и C_3. Из условия равенства нулю определителя системы получим уравнение для определения скорости a [3]

$$16(1-\alpha_1^2)(1-\alpha_2^2)=(2-\alpha_1^2)^4.$$

ЛИТЕРАТУРА

1 Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г. и др. Трехмерные задачи математической теории упругости. Тбилисский университет, Тбилиси, 1968.

2 Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, ГИТТЛ, М.—Л., 1950.

3. Новацкий В. Динамика сооружений. Гос. изд. литературы по строительству. М., 1963.