

В.И.Климов, В.В.Папко

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КОНИЧЕСКОЙ ТОНКОСТЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ  
ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКЕ

Рассматриваются конические тонкостенные конструкции произвольного открытого профиля как гладкие, так и подкрепленные. Обшивка предполагается безмоментной.

Основные уравнения и формулы получены на основе принципа минимума дополнительной потенциальной энергии. В основу аппроксимации напряженного состояния положены две гипотезы - гипотеза деформации, справедливая для длинных тонкостенных конструкций, и гипотеза сдвига, описывающая достаточно хорошо напряженное состояние коротких тонкостенных конструкций.

Подобное объединение двух типов напряженного состояния позволяет получить прикладную методику, применимую для расчета тонкостенных конструкций большой, средней и малой длины при произвольной внешней нагрузке, в качестве которой принимаются моменты  $M_x = M_x(z)$ ,  $M_z = M_z(z)$  и сила  $Q_y = Q_y(z)$ . Положительные направления нагрузок показаны на рис. I.

Используя основные соотношения работы [2], можно получить следующие формулы для напряжений,

При расчете на основе гипотезы сдвига:

$$\sigma_1 = -\varphi \frac{l_1}{z} \left[ k_1 \frac{M_{x1}}{F_y} \hat{\gamma} + \frac{B_1}{J_p} \hat{\gamma} \right] \quad (I)$$

$$\tau_1 = \frac{1}{h} \left[ k_1 \frac{M'_{x1}}{F_y} \hat{S}_y + \frac{B_1}{J_p} \hat{S}_y \right]$$

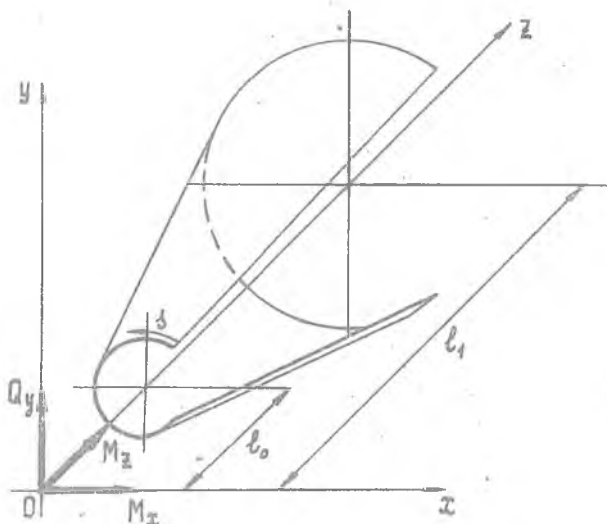


Рис. I.

При расчете на основе гипотезы депланации

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \varphi \frac{l_1}{z} \left[ K_2 \frac{M_{xz}}{J_{Tz}} \tilde{y} + \frac{B_2}{J_{\tilde{\omega}}} \tilde{\omega} \right] \\ \tau_2 &= -\frac{1}{h} \left[ K_2 \frac{M'_{xz}}{J_{Tz}} \tilde{s}_x + \frac{B'_2}{J_{\tilde{\omega}}} \tilde{s}_\omega \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Штрихами здесь обозначены производные по координате  $z$  и приняты следующие обозначения:

$h(s)$  — толщина оболочки,  $s$  — криволинейная координата точки контура поперечного сечения

$$\varphi(s) = \frac{E(s)}{E_0}$$

$$M_{x1} = \frac{l_1}{z} M_{x1}, \quad M_{x2} = \frac{l_1}{z} M_{x2}$$

$B_1, B_2$  — бимоменты.

Здесь и в дальнейшем величины, обозначенные индексом 1, соответствуют напряженному состоянию типа сдвига. Индекс 2 озна-

чает напряженное состояние типа деформации.

Остальные обозначения соответствуют работе [2].

Выражения для бимоментов можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} B_1 &= \mathcal{C}_1 - x_c (\mathcal{M}_{x_1} - \mathcal{M}_{x_1}^0) + B_1^0, \\ B_2 &= \mathcal{C}_2 - x_D (\mathcal{M}_{x_2} - \mathcal{M}_{x_2}^0) + B_2^0, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\mathcal{C}_1 = \int_{\ell_0}^z \mathcal{M}_{x_1} dz, \quad \mathcal{C}_2 = \int_{\ell_0}^z \mathcal{M}_{x_2} dz,$$

$\mathcal{M}_{x_1}^0, \mathcal{M}_{x_2}^0, B_1^0, B_2^0$  - значения соответствующих моментов и бимоментов в сечении с координатой  $z = \ell_0$ .

При действии на конструкцию перерезывающих сил и изгибающих моментов в ее сечениях, в общем случае, возникают напряжения, соответствующие как изгибу, так и кручению. Поэтому в формулах (1), (2) для напряжений удержано по два слагаемых, первое из которых соответствует напряжениям от изгиба, а второе - напряжениям от кручения.

В соответствии с методом полагаем:

$$\mathcal{M}_x = \mathcal{M}_{x_1} + \mathcal{M}_{x_2} \quad (4)$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 \quad (5)$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2, \quad \tau = \tau_1 + \tau_2, \quad (6)$$

причем

$$\mathcal{M}_x = \frac{\ell_1}{z} \mathcal{M}_x, \quad \mathcal{M}_x' = -\frac{\ell_1}{z} \tilde{Q}_y, \quad \tilde{Q}_y = Q_y + \frac{M_x}{z}$$

$$\mathcal{C} = \int_{\ell_0}^z \mathcal{M}_x dz, \quad \mathcal{M}_x = \left(\frac{\ell_1}{z}\right)^2 \mathcal{M}_x.$$

Используя принцип Кастильяно, получим уравнения совместности деформаций, из которых определим долю каждого напряженного состояния в восприятии внешних нагрузок.

Выражение для дополнительной потенциальной энергии конструкции имеет вид:

$$\bar{U} = \int_{\ell_0}^{\ell_1} \left\{ \oint_s \left[ \frac{\mathcal{C}^2}{2\psi E_0} + \frac{\tau^2}{2\psi y_0} \right] h ds \right\} \frac{z}{\ell_1} dz, \quad \psi = \frac{y}{y_0}.$$

Подставляя сюда выражения (1) и (2) для напряжений и интегрируя по контуру сечения, получим функционал

$$U = \int_{\ell_0}^{\ell_1} \Phi(z, \mathcal{M}_{x_1}, \mathcal{M}_{x_2}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{M}'_{x_1}, \mathcal{M}'_{x_2}, \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2) dz, \quad (7)$$

зависящий от  $\mathcal{M}_{x_1}$ ,  $\mathcal{M}_{x_2}$ ,  $\mathcal{B}_1$  и  $\mathcal{B}_2$  и их производных.

Таким образом, мы приходим к задаче об условном экстремуме функционала (7) с условиями связи (4), (5), которые с учетом (3) можно привести к виду

$$\mathcal{M}_x = \mathcal{M}_{x_1} + \mathcal{M}_{x_2} \quad (8)$$

$$\mathcal{C} = x_c \mathcal{M}_{x_1} + x_D \mathcal{M}_{x_2} + \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 - c,$$

где

$$c = x_c \mathcal{M}_{x_1}^0 + x_D \mathcal{M}_{x_2}^0 + \mathcal{B}_1^0 + \mathcal{B}_2^0.$$

С помощью зависимостей (8) из выражения энергии (7) можно исключить  $\mathcal{M}_{x_1}$ ,  $\mathcal{B}_1$  и прийти, таким образом, к задаче об условном экстремуме функционала

$$\bar{U} = \int_{\ell_0}^{\ell_1} F(z, \mathcal{M}_{x_2}, \mathcal{B}_2, \mathcal{M}'_{x_2}, \mathcal{B}'_2, c) dz, \quad (9)$$

зависящего от  $\mathcal{M}_{x_2}$ ,  $\mathcal{B}_2$ ,  $\mathcal{M}'_{x_2}$ ,  $\mathcal{B}'_2$  и  $c$

Записав уравнения Эйлера и условие

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial c} = 0, \quad (10)$$

получим:

$$\begin{aligned} \frac{z}{\ell_1} \frac{d}{dz} \left[ \frac{z}{\ell_1} (\alpha_1 \mathcal{M}'_{x_2} + \beta_1 \mathcal{B}'_2) \right] - \alpha_2 \mathcal{M}_{x_2} - \alpha_3 \mathcal{B}_2 = \\ = -(\alpha_2 - x_D \alpha_3) \mathcal{M}_x - \alpha_3 (\mathcal{C} + c) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{z}{\ell_1} \frac{d}{dz} \left[ \frac{z}{\ell_1} (\beta_1 \mathcal{M}'_{x_2} + \beta_2 \mathcal{B}'_2) \right] - \alpha_3 \mathcal{M}_{x_2} - \beta_3 \mathcal{B}_2 = \\ = -(\alpha_3 - x_D \beta_3) \mathcal{M}_x - \beta_3 (\mathcal{C} + c) \end{aligned}$$

$$\frac{E_0}{G_0} \int_{\ell_0}^{\ell_1} \left[ (\alpha_3 - x_D \beta_3) \mathcal{M}_x + \beta_3 (\mathcal{C} + c) - \alpha_3 \mathcal{M}_{x_2} - \beta_3 \mathcal{B}_2 \right] \left( \frac{\ell_1}{z} \right) dz +$$

$$+ \frac{1}{J \bar{\omega}} \int_{\ell_0}^{\ell_1} (\mathcal{C} + c - x_D \mathcal{M}_x) \left( \frac{\ell_1}{z} \right) dz = 0, \quad (12)$$

где

$$\alpha_1 = \left(\frac{\kappa_2}{J_{Tx}}\right)^2 D_x - \frac{\kappa_1}{F_y} - \frac{(x_D - x_c)^2}{J_p}$$

$$\alpha_2 = \frac{G_0}{E_0} \left[ \left(\frac{\kappa_1}{F_y}\right)^2 J_y + \left(\frac{x_D - x_c}{J_p}\right)^2 J_y + 2(x_D - x_c) \frac{\kappa_1}{F_y} \frac{1}{J_p} J_{yy} - \frac{\kappa_2}{J_{Tx}} \right]$$

$$\alpha_3 = \frac{G_0}{E_0} \left[ (x_D - x_c) \frac{J_y}{J_p^2} + \frac{\kappa_1}{F_y} \frac{J_{yx}}{J_p} \right]$$

$$\beta_1 = \frac{\kappa_2}{J_{Tx}} \frac{D_{\omega x}}{J_{\tilde{\omega}}} - \frac{(x_D - x_c)}{J_p}, \quad \beta_2 = \frac{D_{\omega}}{J_{\tilde{\omega}}^2} - \frac{1}{J_p}, \quad \beta_3 = \frac{G_0}{E_0} \left( \frac{J_y}{J_p} - \frac{1}{J_{\tilde{\omega}}} \right)$$

$$J_y = \oint \varphi \hat{v}^2 h ds, \quad J_y = \oint \varphi \hat{y}^2 h ds, \quad J_{yy} = \oint \varphi \hat{y}^4 h ds$$

$$J_p = -\oint \varphi \hat{y} \tilde{\omega} h ds, \quad J_{\tilde{\omega}} = \oint \varphi \tilde{\omega}^2 h ds$$

$$D_x = \oint \tilde{S}_x^2 \frac{ds}{\psi h}, \quad D_{\omega} = \oint \tilde{S}_{\omega}^2 \frac{ds}{\psi h}, \quad D_{\omega x} = \oint \tilde{S}_x \tilde{S}_{\omega} \frac{ds}{\psi h}$$

$$F_y = -\kappa_1 \oint \varphi \hat{v} \tilde{y} h ds, \quad J_{Tx} = \kappa_2 \oint \varphi \tilde{y}^2 h ds.$$

При замене переменной  $z$  по формуле

$$t = 1 - \frac{\ln \bar{z}}{\ln \bar{\ell}_0}, \quad \bar{z} = \frac{z}{\ell_1}, \quad \bar{\ell}_0 = \frac{\ell_0}{\ell_1} \quad (13)$$

система (II) превращается в систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\alpha_{1*} \ddot{m}_{x2} + \beta_{1*} \ddot{B}_2 - \alpha_2 m_{x2} - \alpha_3 B_2 = -(\alpha_2 - x_D \alpha_3) m_x - \alpha_3 (\mathcal{B} + c)$$

$$\beta_{1*} \ddot{m}_{x2} + \beta_{2*} \ddot{B}_2 - \alpha_3 m_{x2} - \beta_3 B_2 = -(\alpha_3 - x_D \beta_3) m_x - \beta_3 (\mathcal{B} + c), \quad (14)$$

а уравнение (I2) принимает вид

$$\frac{E_0}{G_0} \int_0^1 [(\alpha_3 - x_D \beta_3) m_x + \beta_3 (\mathcal{B} + c) - \alpha_3 m_{x2} - \beta_3 B_2] dt + \frac{1}{J_{\tilde{\omega}}} \int_0^1 (\mathcal{B} + c - x_D m_x) dt = 0. \quad (15)$$

Здесь

$$\alpha_{1*} = \frac{\alpha_1}{(\ell_1 \ln \bar{\ell}_0)^2}, \quad \beta_{1*} = \frac{\beta_1}{(\ell_1 \ln \bar{\ell}_0)^2}, \quad \beta_{2*} = \frac{\beta_2}{(\ell_1 \ln \bar{\ell}_0)^2} \quad (16)$$

Переменная  $t$  обладает тем свойством, что если  $l_0 \rightarrow \infty$ , то и  $l_1 \rightarrow \infty$ , но так, что  $i_1 - l_0 = l = \text{const}$ . Коническая оболочка переходит при этом в цилиндрическую длины  $l$ , а переменная  $t$  - в безразмерную координату  $\bar{u} = \frac{u}{l}$ , отсчитываемую от торцового сечения цилиндрической оболочки вдоль ее оси. Предельные значения коэффициентов (16) в системе (14) равны

$$\alpha_{1*} = \frac{\alpha_1}{l^2}, \quad \beta_{1*} = \frac{\beta_1}{l^2}, \quad \beta_{2*} = \frac{\beta_2}{l^2}. \quad (17)$$

Таким образом, система уравнений (14), (15) с коэффициентами (17) может быть использована для расчета цилиндрических конструкций. Поэтому в дальнейшем цилиндрические оболочки отдельно рассматриваться не будут.

Решение системы (14) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{x_2}(t) = & (a_2 \mathcal{M}_x + a_1 \mathcal{E}) \operatorname{sh} \lambda_1 t - (a_4 \mathcal{M}_x + a_3 \mathcal{E}) \operatorname{sh} \lambda_2 t + \\ & + a_5 \operatorname{ch} \lambda_1 t - a_6 \operatorname{ch} \lambda_2 t + a_7 \operatorname{sh} \lambda_1 t - a_8 \operatorname{sh} \lambda_2 t \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_2(t) = & (b_2 \mathcal{M}_x + b_1 \mathcal{E}) \operatorname{sh} \lambda_1 t - (b_4 \mathcal{M}_x + b_3 \mathcal{E}) \operatorname{sh} \lambda_2 t + \\ & + b_5 \operatorname{ch} \lambda_1 t - b_6 \operatorname{ch} \lambda_2 t + b_7 \operatorname{sh} \lambda_1 t - b_8 \operatorname{sh} \lambda_2 t + c. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь  $a_1, \dots, a_8, b_1, \dots, b_8$  - некоторые постоянные, из них  $a_5, a_6, a_7, a_8, b_5, b_6, b_7$  и  $b_8$  зависят от  $c$  и начальных значений функций  $\mathcal{M}_{x_2}, \mathcal{B}_2$  и их производных.

Кроме того,

$$\lambda_{1,2}^2 = -\frac{e_2}{2e_3} \mp \sqrt{\left(\frac{e_2}{2e_3}\right)^2 - \frac{e_1}{e_3}}$$

$$e_1 = \alpha_3^2 - \alpha_2 \beta_3, \quad e_2 = \alpha_2 \beta_{2*} + \alpha_{1*} \beta_3 - 2\alpha_3 \beta_{1*}, \quad e_3 = \beta_{1*}^2 - \alpha_{1*} \beta_{2*}.$$

Начальные значения функций и их производных  $\mathcal{M}_{x_2}^0, \mathcal{M}_{x_2}^{\circ}, \mathcal{B}_2^0, \mathcal{B}_2^{\circ}$  и  $c$  являются произвольными постоянными в решении (18) и определяются из уравнений (15) и граничных условий, которые зависят от характера заделки конечных сечений конструкции. Если сечение свободно от нормальных напряжений, то в этом сечении

$$\mathcal{M}_{x_2} = 0, \quad \mathcal{B}_2 = 0. \quad (20)$$

Если сечение не деформируется, то следует использовать естественные граничные условия

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{m}_{x_2}} \right]_{z=\ell_0}^{z=\ell_1} = 0, \quad \left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{B}_2} \right]_{z=\ell_0}^{z=\ell_1} = 0,$$

которые можно записать в виде двух систем уравнений

$$\alpha_1 \dot{m}_{x_2}^0 + \beta_1 \dot{B}_2^0 = 0, \quad \alpha_1 \dot{m}_{x_2}^{(1)} + \beta_1 \dot{B}_2^{(1)} = 0$$

$$\beta_1 \dot{m}_{x_2}^0 + \beta_2 \dot{B}_2^0 = 0, \quad \beta_1 \dot{m}_{x_2}^{(1)} + \beta_2 \dot{B}_2^{(1)} = 0$$

Здесь

$$\dot{m}_{x_2}^{(1)} = \dot{m}_{x_2} \Big|_{t=1}, \quad \dot{B}_2^{(1)} = \dot{B}_2 \Big|_{t=1}$$

Поскольку  $\alpha_1 \beta_2 - \beta_1^2 \neq 0$ , то обе системы имеют нулевое решение

$$\dot{m}_{x_2}^0 = \dot{B}_2^0 = 0,$$

$$\dot{m}_{x_2}^{(1)} = \dot{B}_2^{(1)} = 0$$

Из граничных условий на свободном конце ( $z = \ell_0$ ) при условиях (19) получаем

$$m_{x_2}^0 = 0, \quad B_2^0 = 0,$$

а при условиях (20) будем иметь

$$m_{x_2}^0 = 0, \quad B_2^0 = 0.$$

Константа  $C$  и недостающие начальные значения определяются из уравнения (15) и граничных условий на закрепленном конце конструкции ( $z = \ell_1$ ).

В случае, когда оба торцовых сечения конструкции лишены возможности деформироваться, то есть реализованы граничные условия (20) и (21), константа  $C$  может быть определена независимо от других произвольных постоянных. Действительно, из второго уравнения (14) и (15) следует, что

$$\frac{E_0}{G_0} \int_0^1 (\beta_{1x} \ddot{m}_{x_2} + \beta_{2x} \ddot{B}_2) dt = \frac{1}{J_{\omega}} \int_0^1 (C + c - x_D m_x) dt.$$

Интегрируя в левой части с учетом (20) и (21), получаем

$$C = - \int_0^1 (C - x_D m_x) dt.$$

В качестве примера была рассчитана коническая подкрепленная конструкция, нагруженная на свободном конце ( $z = l_0$ ) поперечной силой  $Q_y = P$ . Поперечное сечение  $z = l_1$  этой конструкции показано на рис. 2. Расстояния торцовых сечений от начала координат  $l_0 = 3a$ ,  $l_1 = 6a$ . Торцовые сечения предполагаются недеформируемыми. Материал конструкции - дуралюмин  $\frac{G_0}{E_0} = 0,37$ ,  $\varphi = \psi = 1$ .

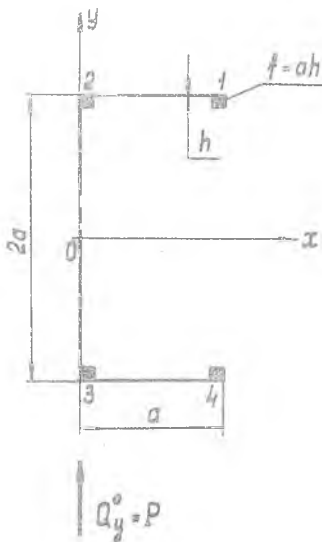


Рис. 2.

На рис. 3 приведены графики распределения моментов и биомоментов по длине конструкции. Характерным для функций  $M_{x1}$  и  $B_1$  является то, что они достигают максимальных значений вблизи недеформируемых торцовых сечений и весьма быстро убывают к середине конструкции.

Координата центра вращения вычислялась по формуле

$$x_0 = \frac{x_c \bar{Q}_{y1} + x_D \bar{Q}_{y2}}{\bar{Q}_y}$$



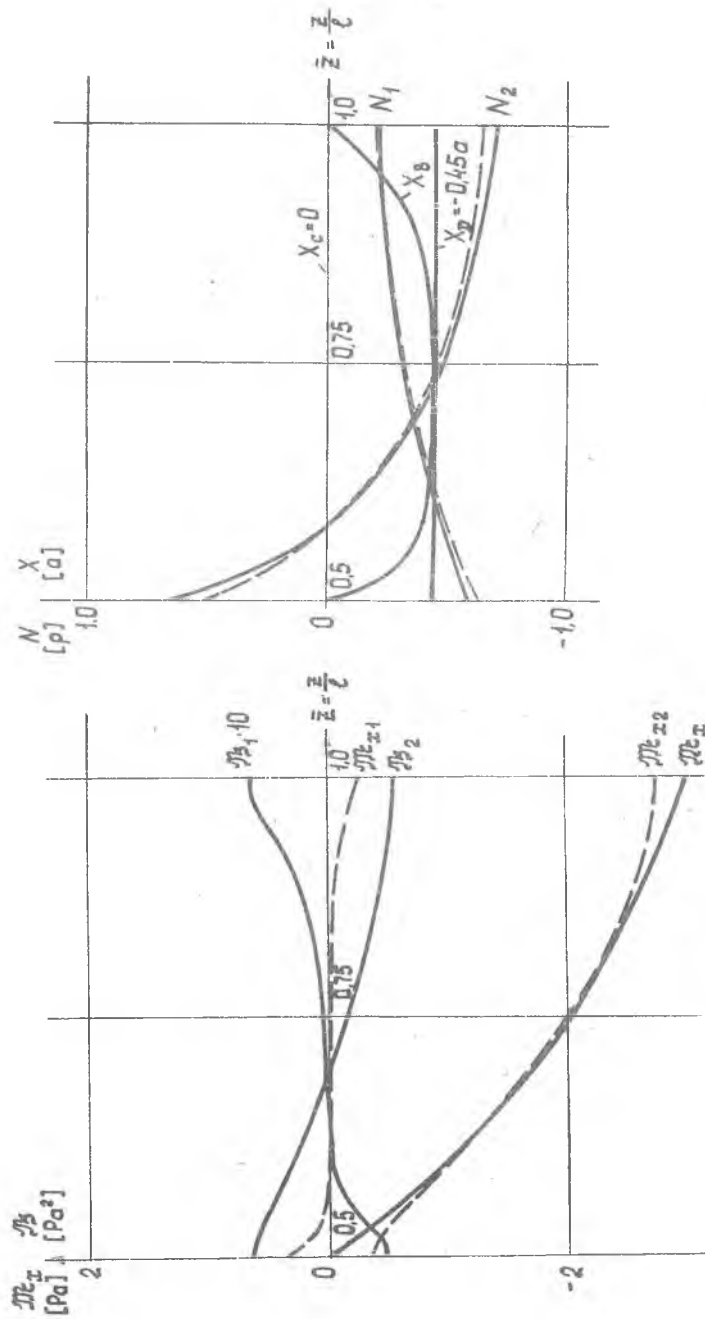


Рис. 4.

Рис. 3.

Зависимость  $X_B = X_B(\bar{z})$  изображена на рис. 4. Как следует из графиков, для центральной части конструкции  $X_B$  почти совпадает с  $X_D$ , а в торцовых сечениях  $X_B = X_C$ .

Таким образом, мы видим, что напряженное состояние типа сдвига существенно лишь в той части конструкции, которая находится вблизи от недепланирующих сечений, в то время как центральная часть работает практически по гипотезе депланиции.

Эпюры нормальных и касательных напряжений в сечении  $\bar{z} = 0,707$  показаны на рис. 5 и 6. Как видно из эпюр, в угловых точках сечения имеется концентрация нормальных напряжений, которую можно оценить величиной

$$\mu = \frac{\sigma - \sigma^D}{\sigma^D}$$

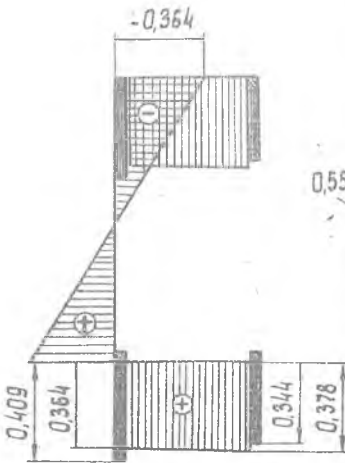


Рис. 5.

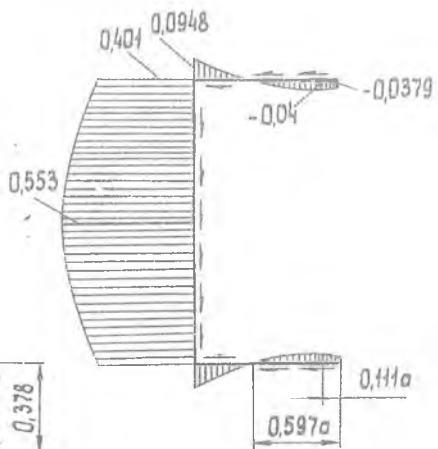


Рис. 6.

где  $\sigma$  - напряжение, полученное уточненным методом;  $\sigma^D$  - напряжение, полученное на основе гипотезы депланиции.

В нашем примере концентрация напряжений в угловой точке 2 имеет следующие значения:

$\mu = 0,229$	при	$\bar{z} = 0,5$
$\mu = 0,046$	при	$\bar{z} = 0,707$
$\mu = 0,086$	при	$\bar{z} = 1,0$

Эти цифры свидетельствуют о том, что концентрация напряжений наиболее значительна вблизи недепланирующих сечений. Такой характер распределения концентрации напряжений по длине конструкции подтверждается графиками усилий в стрингерах, приведенными на рис. 6. Цунктирные кривые на рис. 6 соответствуют расчету на основе гипотезы депланации.

### Л и т е р а т у р а

1. Марьян В.А. Приближенные методы расчета открытых оболочек. Труды ВВИА им. Н.Е.Жуковского, вып. 441, 1952.
2. Климов В.И. Расчет открытых оболочек типа авиаконструкций. Труды МАИ, вып. 89, Оборонгиз, 1957.